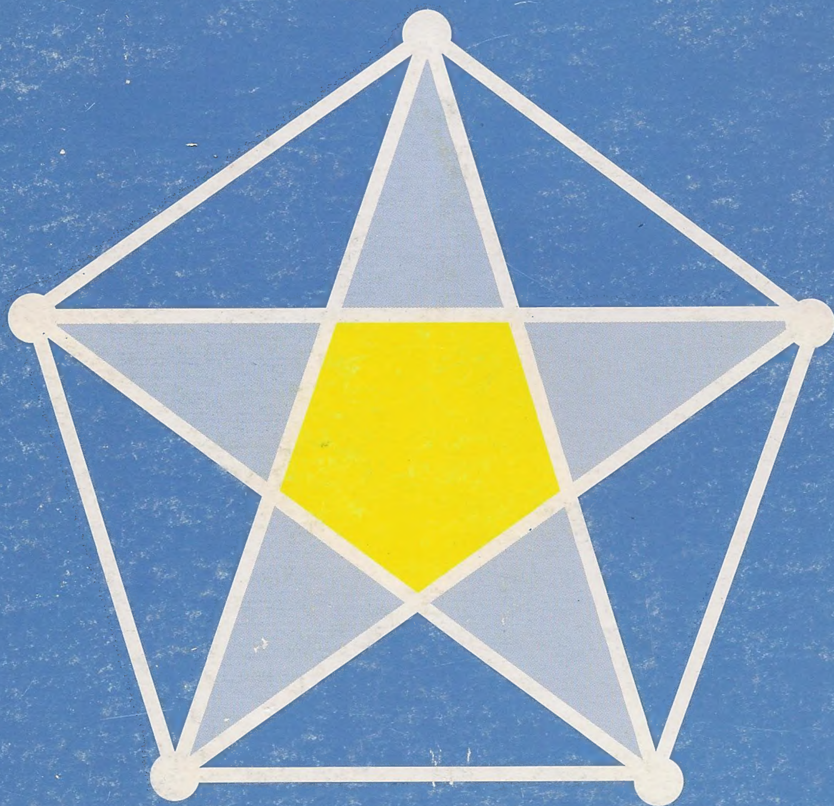
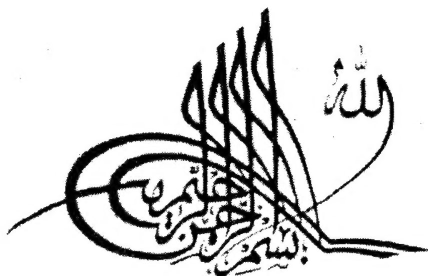
درسهایی از
نظریه‌ی گراف

ویژه علاقه‌مندان به المپیادهای ریاضی و کامپیوتر



علیرضا علیپور

گنجینه‌ی کتب المپیادهای ریاضی و کامپیوتر نشریه راه‌المپیاد



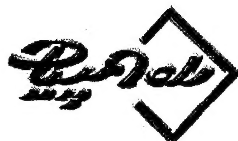
درس‌هایی از نظریه‌ی گراف

ویژه علاقه‌مندان به المپیادهای

ریاضی و کامپیوتر

تقدیم به پدر و مادر عزیزم: منوچهر علی‌پور و راضیه مرادیان

علیرضا علی‌پور



درس‌هایی از نظریه‌ی گراف

تألیف: علیرضا علی‌پور

ناشر: مرکز نشر فرهنگی آیه

نوبت چاپ: اول ۱۳۷۸

تعداد: ۳۰۰۰ نسخه

حروف‌چینی: نصیر کریمی

لیتوگرافی: پیام

چاپ و صحافی: چاپ محمد

تلفن مرکز پخش: ۹۲۶۵۹۹

بها: ۹۰۰ تومان

علی‌پور علیرضا، ۱۳۵۴

درس‌هایی از نظریه‌ی گراف ویژهٔ علاقه‌مندان به المپیادهای ریاضی و کامپیوتر / مولف علیرضا علی‌پور .- تهران: مرکز نشر فرهنگی آیه، ۱۳۷۸

۱۹۵ ص. : مصور .- (... سری کتاب‌های راه‌المپیاد؛ ۱)

ISBN 964-5741-05-x

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

کتابنامه : ص. ۱۹۵ .

۱. المپیادها (ریاضیات). ۲.المپیادها(کامپیوتر). ۳. گرافها --- مسائل، تمرینها و غیره.

۴. ریاضیات --مسابقه‌ها. الف.عنوان.

۴د۸ع/۴/۳۰۶۰ LB ۳۷۳/۲۳۸

کتابخانه ملی ایران ۲۰۶۷۳-۷۸م

به نام خداوند جان و خرد

پس از پیروزی انقلاب اسلامی، مسوؤلان آموزش و پرورش کشور دریافتند که میزان استقبال دانش‌آموزان، از رشتهٔ ریاضی کاهش یافته است. برای تحقیق در علّت این پدیده، کمیته‌ای مرکّب از استادان ریاضی دانشگاه‌ها و کارشناسان گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی در سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی تشکیل شد و طرحی برای تحقیق، تهیه و اجراء گردید. از جمله‌ی نتایج این تحقیق، این بود که روند کاهش درصد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی از سالهای قبل از پیروزی انقلاب اسلامی آغاز شده و همچنان ادامه یافته است. یک بررسی آماری نشان داد که درصد دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی از ۲۶ درصد کل دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه در سال ۱۳۵٤ به ۱۲ درصد در سال ۱۳۵٦ تنزّل یافته است و این احتمال قوّت گرفت که این کاهش شدید با تغییر نظام آموزشی اجرا شده در آن سالها و با تأسیس رشته‌های جدیدی مانند رشته‌ی «اقتصاد اجتماعی» ارتباط دارد.

کمیته‌ی بررسی علل افت کمّی دانش‌آموزان رشته‌ی ریاضی، برای حل این مشکل، از جمله پیشنهاد کرد همه ساله مسابقه‌ای علمی در سطح کشور میان دانش‌آموزان مستعدّ رشته‌ی ریاضی دبیرستانهای کشور برگزار شود و به دانش‌آموزانی که در این مسابقات رتبه‌های بالا را احراز می‌کنند، جوایز خاصی اعطا گردد تا موجبات تشویق دیگران فراهم آید. در اجرای این پیشنهاد نخستین مسابقه سراسری دانش‌آموزان رشته ریاضی دبیرستانهای کشور، در فروردین ماه سال ۱۳٦۳ در شیراز، با شرکت ۹۰ نفر از بهترین دانش‌آموزان این رشته که از سراسر کشور برگزیده شده بودند برگزار شد و از آن پس همه ساله این مسابقات با اهتمام و جدیّت روزافزونی، در دیگر مراکز استانهای کشور برگزار گردید و آثار مثبت آن در جلب توجّه و افزایش استقبال دانش‌آموزان از تحصیل در رشته‌ی ریاضی، به نحو رضایت بخشی آشکار گشت.

در سال ۱۳٦٥ به دنبال شرکت کارشناسانی از گروه ریاضی دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی در کنفرانس بین‌المللی آموزش ریاضی، مقدّمات ارتباط با المپیاد جهانی فراهم شد.

شرکت تیم دانش‌آموزی ایران در المپیاد ریاضی که در سالهای پایانی جنگ تحمیلی صورت می‌گرفت، تعجّب سرپرستان تیمهای سایر کشورها را برانگیخت، امّا تعجّب آنان وقتی بیشتر شد که با اعلام نتایج مسابقات معلوم شد جمهوری اسلامی ایران در این نخستین بار، در جمع ٤۲ کشور شرکت کننده، مقام بیست‌وششم را احراز کرده، و یکی از دانش‌آموزان ما نیز موفّق به کسب مدال برنز شده است. تشکیل کمیتهٔ ملّی المپیاد ریاضی، مرکّب از استادان ریاضی دانشگاهها و دبیران با

تجربه و کارشناسان ریاضی دفتر تألیف کتب درسی نخستین اقدامی بود که با همکاری انجمن ریاضی ایران صورت گرفت.

عشق و علاقه به سربلندی ایران و اشتیاق به پیشرفت علمی کشور در اعضای کمیته در بیست‌ونهمین المپیاد ریاضی که در سال ۱۳۶۷ در استرالیا برگزار شد، نتیجه‌ی خود را آشکار ساخت و تیم جمهوری اسلامی ایران توانست با کسب یک مدال نقره و ۳ مدال برنز در جمع ۴۹ کشور به مقام بیستم نایل شود. از آن پس سیر صعودی مقام ایران در المپیاد ریاضی آغاز شد. در سال ۱۳۶۸ در آلمان، ایران با ۲ مدال نقره و ۳ مدال برنز و یک دیپلم افتخار در جمع ۵۰ کشور به مقام چهاردهم و در سال ۱۳۶۹ در چین با ٤ مدال نقره در جمع ٥٤ کشور، بار دیگر به مقام چهاردهم دست یافت. سال بعد در سوئد، ایران برای نخستین بار به مدال طلا دست یافت و تیم ما با دو مدال طلا و یک نقره و دو برنز توانست در جمع ٥٤ کشور به مقام هشتم ارتقاء یابد و در سال ۱۳۷۷ در سی‌ونهمین المپیاد جهانی ریاضی ایران اسلامی با کسب ۵ مدال طلا و یک نقره مقام اوّل را به دست آورد.

شوق و علاقه بسیار در بین جوانان کشور، ما را بر آن داشت که قدمی در این راستا برداریم. در ابتدا نشریه راه‌المپیاد را به صورت فصل‌نامه و با چهار موضوع ریاضی، کامپیوتر، فیزیک و شیمی به چاپ رساندیم. بعد از یک سال نشریه راه‌المپیاد با موضوع ریاضی و کامپیوتر به صورت فصل‌نامه ارایه گشت و برای موضوعات دیگر نیز فصل‌نامه‌هایی به چاپ رسیدند. استقبال جوانان کشور از نشریه راه‌المپیاد موجب شد تا دفتر نشریه با همکاری تعدادی از اساتید و دانشجویان نخبه کشور اقدام به چاپ گنجینه‌ای از کتب ریاضی و فیزیک ویژه المپیادهای ریاضی، کامپیوتر و فیزیک نماید.

کتاب حاضر اولین سری از گنجینه‌ی کتب ریاضی المپیادهای ریاضی و کامپیوتر است که توسط جناب آقای علیرضا علی‌پور تالیف گردیده است. بی‌شک این کتاب حاصل سالها تدریس ایشان در کلاس‌های مختلف ویژهٔ المپیادهای ریاضی و کامپیوتر و مطالعات فراوان در مقطع کارشناسی‌ارشد دانشگاه صنعتی شریف است.

وظیفه خود می‌دانیم در اینجا از زحمات مولف محترم و همچنین همکاران محترم دفتر نشریه خصوصاً جناب آقای نصیرکریمی، تشکر و قدردانی کرده، از خداوند منان برای همه‌ی آنها توفیق و سلامت مسئلت داریم.

مدیر مسوؤل نشریه راه‌المپیاد

مقدمه

نظریه گراف یکی از شاخه‌های ریاضیات گسسته است که به مطالعهٔ ارتباط بین برخی اعضاء از یک مجموعه می‌پردازد. نخستین مقاله در نظریهٔ گراف در سال ۱۷۳۶ توسط اولر، ریاضیدان سویسی، به چاپ رسید که در آن به حل معمای پلهای کونیگزبرگ پرداخته بود. در آغاز، نظریهٔ گرافها چندان مهم به نظر نمی‌رسید زیرا بیشتر با بازیها و معماهای سرگرم‌کننده سروکار داشت. اما امروزه کاربرد وسیع نظریهٔ گرافها در علوم مختلف باعث شده تا ریاضیدانان توجه خاصی به این شاخه از ریاضیات داشته باشند و روز به روز نیز شاهد چاپ مقاله‌های متعدد در این زمینه و پیشرفت این نظریه هستیم.

هدف از نگارش این کتاب در اختیار گذاشتن مرجعی مناسب برای دانش‌آموزان شرکت‌کننده در المپیادهای ریاضی و کامپیوتر بوده است. این کتاب حاصل چند سال تدریس در دبیرستانهای مختلف بوده و اذعان دارم که در این کتاب جای بسیاری از مباحث و مسایل خالی است. امیدوارم که در چاپهای بعدی کتاب بتوانیم این مطالب را اضافه کنم. همچنین از اساتید، دانشجویان، دانش‌آموزان و خوانندگان عزیز استدعا دارم که اینجانب را در چاپهای بعدی این کتاب با نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود یاری فرمایند.

در این کتاب از بیان جنبه‌های تاریخی، توضیحات اضافی و

کاربردهای نظریهٔ گراف خودداری شده و صرفاً مطالب اصلی عنوان شده است. در پایان هر فصل نیز چند مسأله آورده شده تا دانش‌آموز با حل آنها تسلط نسبی روی مطالب پیدا کند. همچنین در انتهای کتاب حل مسأله‌ها آمده است تا دانش‌آموز با مشاهدهٔ آنها روشهای مختلف حل مسأله‌های نظریهٔ گراف را بیاموزد. اکثر مطالب این کتاب برای دانش‌آموزان مبتدی دبیرستانی قابل فهم است ولی برای آموختن کلیهٔ مطالب کتاب نیاز به دانستن استقرای ریاضی و آنالیز ترکیبی مقدماتی است.

در پایان لازم می‌دانم از پدر و مادرم که من را در نگارش این کتاب یاری کردند تشکر کنم. همچنین از اساتید گرامی جناب آقایان دکتر سید عبادا. محمودیان، دکتر سعید اکبری، دکتر امیر دانشگر، و آقای علی‌اصغر خانبان که مطالب بسیاری از نظریهٔ گرافها را از آنها آموختم تشکر می‌کنم.

علی‌رضا علیپور

آبان‌ماه ۱۳۷۸

فهرست مندرجات

فصل ۱

پیش درآمد

هدف این فصل معرفی چند مسأله نمونه است تا خواننده با مطالعهٔ آنها متوجه شود که نظریهٔ گرافها برای پاسخ به چه مسایلی به‌وجود آمده است.

برخی از این نمونه مسایل را می‌توان با معلومات پایه حل کرد ولی برای حل برخی دیگر نیاز به قدری معلومات بیشتر است. قصد داریم تا از فصل بعد نظریه‌های لازم را برای حل این مسایل ارایه کنیم.

همانطور که در مقدمه ذکر شد نظریهٔ گراف به مطالعهٔ ارتباط بین برخی اعضاء از یک مجموعه می‌پردازد و به مسایل مختلف دربارهٔ ارتباط پاسخ می‌دهد.

به عنوان مثال رابطهٔ دوستی بین دانش‌آموزان یک مدرسه، پیوند شیمیایی بین مولکولهای یک ماده، شبکهٔ راههای ارتباطی یک کشور، مسابقات لیگ کشور، و . . .همگی از مسایلی هستند که می‌توان یک مدلسازی ریاضی برای آنها کرد.

به این صورت که برای هر عضو مجموعه یک نقطه در صفحه در

نظر گرفت و ارتباط بین دو عضو از مجموعه را با یک خط بین دو نقطهٔ متناظر نشان داد. به شکل بدست آمده یک گراف می‌گوییم. از روی این شکل ممکن است به بسیاری از سؤالات بتوانیم راحتتر پاسخ دهیم. به عنوان مثال برای شبکهٔ راههای ارتباطی یک کشور ممکن است بخواهیم به سؤالات زیر پاسخ دهیم.

- آیا شبکهٔ راههای ارتباطی پیوسته است یعنی آیا می‌توان بین هر دو شهر از کشور توسط این راهها مسافرت کرد؟
- آیا راهی وجود دارد که با حذف آن، شبکهٔ ارتباطی ناپیوسته شود؟
- آیا می‌توان از یک شهر شروع به حرکت کنیم و از تمام شهرهای کشور دقیقاً یکبار عبور کنیم و در نهایت به شهر اولیه باز گردیم؟

حال در هر یک از مسأله‌های زیر که می‌توانید مسأله را به مسأله‌ای دربارهٔ گراف متناظر با معلومات مسأله تبدیل کنید.

مسألهٔ ۱. آیا می‌توان طوری برنامه‌ریزی کرد که ۶ تیم فوتبال به ترتیب ۲, ۳, ۳, ۳, ۴, ۴ بازی با یکدیگر انجام دهند؟

مسألهٔ ۲. آیا بین ۹ شهر می‌توان ۷ جاده احداث نمود به طوری که بین هر دو شهر بتوان به وسیلهٔ این جاده‌ها رفت و آمد کرد؟

مسألهٔ ۳. در یک جمع n نفره، $n \geq ۲$، ثابت کنید دو نفر وجود دارند که تعداد دوستان آنها در این جمع برابر است.

مسألهٔ ۴. در یک جمع n نفره، $n \geq ۳$، هر نفر حداقل با نیمی از افراد این جمع دوست است. ثابت کنید این n نفر می‌توانند دور یک میز بنشینند به نحوی که دو نفر مجاور هر فرد از دوستان او باشند.

مسألهٔ ۵. n تیم دوبدو با یکدیگر بازی کردند. نتیجهٔ هر بازی برد یک تیم و باخت تیم دیگر بوده است. ثابت کنید تیم x وجود دارد که برای هر تیم دیگر y یا x از y برده است و یا تیم z وجود دارد که x از z برده و z از y برده است.

مسألهٔ ٦. ۱۰ تیم در یک دوره مسابقه شرکت کردند. در این دوره ۲٦ مسابقه انجام شد و در ضمن هیچ دو تیمی بیش از یکبار با هم بازی نکردند. ثابت کنید سه تیم می‌توان یافت که هر دو تا از آنها با هم بازی کرده‌اند.

مسألهٔ ۷. در یک کشور ۲۵ شهر موجود است. از هر شهر حداقل ۱۲ جاده خارج شده است و در ضمن بین هیچ دو شهری بیش از یک جاده موجود نیست. ثابت کنید شبکهٔ راههای ارتباطی این کشور پیوسته است.

مسألهٔ ۸. در یک جمع ٦ نفره هر دو نفر یا با هم دوست هستند و یا دشمن. ثابت کنید که سه نفر می‌توان یافت که دوبدو با یکدیگر دوست هستند و یا دوبدو با یکدیگر دشمن هستند.

مسألهٔ ۹. آیا ممکن است ۱۷ نفر به یکدیگر طوری نامه بنویسند به طوری که هر نفر برای ۵ نفر نامه بنویسید و ۵ نامه از کسانی که به آنها نامه نوشته است دریافت کند؟

مسألهٔ ۱۰. در یک کشور n شهر وجود دارد. بین هر دو شهر یک جاده یک طرفه موجود است. ثابت کنید شهری وجود دارد که از آن می‌توان شروع به حرکت کرد و از همهٔ شهرهای کشور دقیقاً یکبار دیدن کرد.

شایسته است که خواننده پس از مطالعهٔ هر فصل برای آزمایش خود دوباره این ۱۰ مسأله را مطالعه کند و ببیند کدام مسأله‌ها در آن فصل حل شده و یا با معلومات آن فصل قابل حل است.

فصل ۲

گراف و دنبالهٔ درجه‌ای

۱.۲ گراف

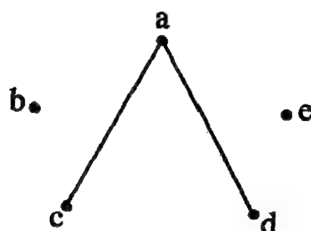
تعریف ۱. منظور از گراف سادهٔ G، زوج مرتب (V, E) است که V مجموعه‌ای ناتهی و اعضای E زیرمجموعه‌های دو عضوی V هستند. به هر عضو V یک رأس G و به هر عضو E یک یال G می‌گوییم.

تذکر. چنانچه با چند گراف مانند G، H، و ...سروکار داشته باشیم، برای جلوگیری از بروز اشتباه، مجموعهٔ رأسها و یالهای G را به جای V و E به ترتیب با $V(G)$ و $E(G)$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۱. اگر $V = \{a, b, c, d, e\}$ و $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}\}$، در این صورت $G = (V, E)$ گرافی با ۵ رأس و ۲ یال است.

اگر در گراف سادهٔ G، $u, v \in V(G)$ و $\{u,v\} \in E(G)$، برای سادگی به جای $\{u,v\}$ می‌نویسیم uv و می‌گوییم u و v در G مجاورند و یا به هم متصلند و یا u همسایهٔ v است. همچنین u و v را دو سریال uv می‌گوییم. مجموعهٔ همسایه‌های رأس u در گراف G را با $N(u)$ نمایش می‌دهیم.

برای درک بیشتر، به هر گراف یک نمودار در صفحه نسبت می‌دهیم. به این طریق که به ازای هر رأس گراف یک نقطه در صفحه در نظر می‌گیریم و چنانچه دو رأس در گراف مجاور باشند بین نقاط متناظر دو رأس خط یا کمانی قرار می‌دهیم. به عنوان مثال، شکل زیر نموداری برای گراف مثال ۱ است.



شکل ۱

از این پس بین گراف و نمودار گراف تمایزی قایل نیستیم چرا که از روی یکی، دیگری را می‌توان بدست آورد.

تعداد رأسها و یالهای گراف G را به ترتیب با $p(G)$ و $q(G)$ و یا به طور ساده‌تر با p و q نمایش می‌دهیم.

۲.۲ دنبالهٔ درجه‌ای

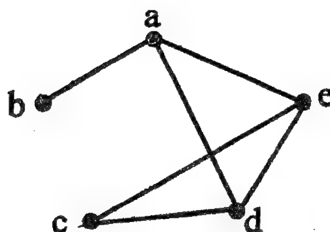
تعریف ۲. منظور از درجهٔ رأس v در گراف G، تعداد یالهایی از G است که v روی آنها قرار دارد. درجهٔ رأس v در G را با نماد $\deg_G v$ و یا به طور

ساده‌تر با $\deg v$ نمایش می‌دهیم. اگر $\deg v$ عددی فرد باشد v را یک رأس فرد و در غیر این صورت یک رأس زوج می‌نامیم. اگر $\deg v = ۰$، v را یک رأسِ تنها و اگر $\deg v = ۱$، v را آویز و یا برگ می‌نامیم. اگر $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_p\}$ مجموعهٔ رأسهای G باشد به دنبالهٔ

$$(\deg v_۱, \ldots, \deg v_p)$$

دنبالهٔ درجه‌ای G می‌گوییم. کوچکترین و بزرگترین عدد در دنبالهٔ درجه‌ای را به ترتیب با $\delta(G)$ و $\Delta(G)$ و یا به طور ساده‌تر با δ و Δ نمایش می‌دهیم.

مثال ۲. در گراف شکل زیر $p = ۵$، $q = ٦$، $\deg a = ۳$، $\delta = ۱$، و $\Delta = ۳$ است.



شکل ۲

قضیه ۱. اگر $\{v_۱, \ldots, v_p\}$ مجموعهٔ رأسهای گراف G باشد، آنگاه

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = ۲q$$

اثبات. فرض کنید

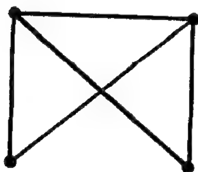
$$S = \{(v, e) | \text{رأس } v \text{ روی یال } e \text{ قرار دارد}\}$$

برای هر رأس v، تعداد زوجهای مرتب S که مؤلفهٔ اول آنها v است برابر $\deg v$ است. در نتیجه $\sum_{i=۱}^{p} \deg v_i = |S|$. از طرفی برای هر یال e، تعداد زوجهای مرتب S که مؤلفهٔ دوم آنها e است برابر ۲ می‌باشد. پس $|S| = ۲q$ و حکم به اثبات می‌رسد. □

نتیجه. تعداد رأسهای فرد در هر گراف، عددی زوج است.

تعریف ۳. دنبالهٔ $\mathrm{d} = (d_۱, \ldots, d_p)$ از اعداد صحیح نامنفی را گرافیک گوییم هرگاه گراف سادهٔ G یافت شود که d دنبالهٔ درجه‌ای G باشد.

مثال ۳. دنبالهٔ $(۲, ۲, ۳, ۳)$ گرافیک است زیرا دنبالهٔ درجه‌ای گراف سادهٔ شکل زیر است.



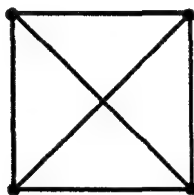
شکل ۳

مثال ۴. دنبالهٔ (۱, ۲, ۲, ۳, ۳) گرافیک نیست. زیرا اگر $(d_۱, \ldots, d_p)$ گرافیک باشد بنا به قضیهٔ ۱، $\sum_{i=۱}^{p} d_i$ عددی زوج است.

۳.۲ گرافهای منتظم

تعریف ۴. گراف G را kـمنتظم گوییم هرگاه درجهٔ همهٔ رأسهای G برابر k باشد.

مثال ۵. منظور از گراف کامل p رأسی K_p، گرافی p رأسی است که هر دو رأس آن به هم متصلند. K_p، گرافی $p - ۱$ـمنتظم است. در شکل (۴) نمودار گراف $K_۴$ رسم شده است.



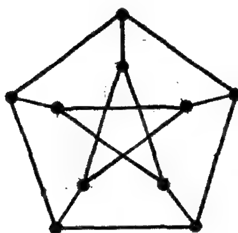
شکل ٤

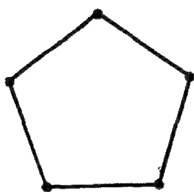
مثال ٦. منظور از دور n رأسی C_n، گرافی با n رأس، مثلاً $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ و مجموعهٔ یالهای $\{x_۱x_۲, x_۲x_۳, \ldots, x_{n-۱}x_n, x_nx_۱\}$ است. C_n گرافی ۲ـمنتظم است. در شکل (۵) نمودار گراف $C_۵$ رسم شده است.

مثال ۷. گراف شکل ٦، که به گراف پترسن معروف است، گرافی ۳ـمنتظم است.

قضیهٔ ۲. تعداد یالهای گراف kـمنتظم p رأسی برابر $\frac{kp}{۲}$ است.

اثبات. با توجه به قضیهٔ ۱، حکم واضح است. □


شکل ۶


شکل ۵

۴.۲ گرافهای قویاً منتظم

تعریف ۵. گراف G را قویاً منتظم می‌گوییم و با $\operatorname{srg}(p,k,r,s)$ نمایش می‌دهیم، هرگاه G گرافی p رأسی و kـمنتظم بوده و هر دو رأس مجاور G دقیقاً r همسایهٔ مشترک و هر دو رأس غیر مجاور G دقیقاً s همسایهٔ مشترک داشته باشند.

مثال ۸. گراف پترسن، $\operatorname{srg}(۱۰,۳,۰,۱)$ است.

مثال ۹. دور ۵ رأسی $C_۵$، $\operatorname{srg}(۵,۲,۰,۱)$ است.

مثال ۱۰. $C_۶$ قویاً منتظم نیست.

مثال ۱۱. گراف کامل K_p، $\operatorname{srg}(p,p-۱,p-۲,s)$ است که در آن، s هر عددی می‌تواند باشد.

قضیهٔ ۳. هرگاه G، $\operatorname{srg}(p,k,r,s)$ باشد، آنگاه

$$s(p-k-۱)=k(k-r-۱)$$

اثبات. رأس دلخواه a را در نظر می‌گیریم. فرض کنید $B = \{b_۱, \ldots, b_k\}$ مجموعهٔ رأسهای مجاور a و $C = \{c_۱, \ldots, c_t\}$ مابقی رأسهای گراف باشد. $(t = p - k - ۱)$ تعداد یالهایی را که یک سر آنها در B و سر دیگر آنها در C است، به دو طریق می‌شماریم.

فرض کنید $۱ \leq i \leq k$. چون a و b_i مجاورند پس دقیقاً r همسایهٔ مشترک دارند. لذا b_i دقیقاً به r رأس از B متصل است. چون $\deg b_i = k$ پس b_i دقیقاً به $k - r - ۱$ رأس از C متصل است. در نتیجه تعداد یالهای بین B و C برابر است با $k(k - r - ۱)$.

از طرف دیگر فرض کنید $۱ \leq j \leq t$. چون a و c_j مجاور نیستند پس دقیقاً s همسایه مشترک دارند. لذا c_j دقیقاً به s رأس از B متصل است. در نتیجه تعداد یالهای بین B و C برابر است با

$$st = s(p - k - ۱)$$

و حکم بدین ترتیب به اثبات می‌رسد. □

۵.۲ مسایل

۱) فرض کنید G گرافی ساده باشد. ثابت کنید

$$q \leq \binom{p}{۲}.$$

۲) ثابت کنید

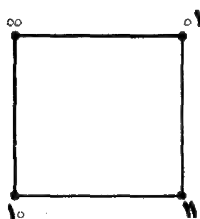
$$\delta \leq \frac{2q}{p} \leq \Delta.$$

۳) فرض کنید G گرافی ساده و $p(G) \geq 2$ باشد. ثابت کنید دو رأس از G مانند u و v وجود دارند که $\deg u = \deg v$. برای $p \geq 3$ گرافی ساده با p رأس بسازید که در آن سه رأس با درجهٔ برابر پیدا نشود.

۴) فرض کنید $k \in \mathbb{N}$ باشد. منظور از kـمکعب گرافی است که مجموعهٔ رأسهای آن مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های kـ رقمی از ۰ و ۱ است و دو رأس مجاورند هرگاه دنباله‌های متناظر دقیقاً در یک مؤلفه اختلاف داشته باشند. به عنوان مثال نمودار ۲ـمکعب در شکل ۷ رسم شده است.

الف) نمودار ۳ـمکعب را رسم کنید.

ب) kـمکعب، چند رأس و چند یال دارد؟



شکل ۷

۵) فرض کنید $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد به گونه‌ای که فاصلهٔ بین هر دو نقطه از آن حداقل ۱ است.

ثابت کنید حداکثر $۳n$ زوج از نقاط این مجموعه، فاصله‌ای دقیقاً برابر ۱ دارند.

۶) کدامیک از دنباله‌های زیر گرافیک است.

i) (۷, ٦, ۵, ۴, ۳, ۳, ۲)

ii) (٦, ٦, ۵, ۴, ۳, ۳, ۱)

iii) (۵, ۵, ۴, ۳, ۲, ۲, ۲, ۱)

iv) (۵, ۵, ۵, ۳, ۲, ۲, ۱, ۱)

v) (۵, ۵, ۴, ۴, ۲, ۲, ۱, ۱)

vi) (۵, ۵, ۵, ۴, ۲, ۱, ۱, ۱)

۷) برای هر عدد طبیعی k، ثابت کنید دنبالهٔ $(۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, k, k)$ گرافیک است.

۸) فرض کنید $d_۱ \geq d_۲ \geq \cdots \geq d_p$ درجهٔ رأسهای گراف G باشد. برای $۱ \leq k \leq p$ ثابت کنید

$$\sum_{i=۱}^{k} d_i \leq k(k-۱) + \sum_{i=k+۱}^{p} \min\{k, d_i\}$$

۹) اعداد طبیعی $۰ < a_۱ < a_۲ < \cdots < a_n$ مفروضند. ثابت کنید گراف سادهٔ G با $p = a_n + ۱$ رأس و دنبالهٔ درجه‌ای $(d_۱, d_۲, \ldots, d_p)$ وجود دارد به گونه‌ای که

$$\{a_۱, a_۲, \ldots, a_n\} = \{d_۱, d_۲, \ldots, d_p\}$$

۱۰) فرض کنید $d_۱ \geq d_۲ \geq \cdots \geq d_p \geq ۰$ و $d_۱ = \Delta \geq ۱$. ثابت کنید $(d_۱, d_۲, \ldots, d_p)$ گرافیک است اگر و تنها اگر

$$(d_۲ - ۱, \ldots, d_{\Delta+۱} - ۱, d_{\Delta+۲}, \ldots, d_p)$$

گرافیک باشد.

۱۱) فرض کنید r و s دو عدد صحیح نامنفی باشند و $s \geq ۲$ و G گرافی ساده باشد که در آن، هر دو رأس مجاور دقیقاً r همسایهٔ مشترک و هر دو رأس غیر مجاور دقیقاً s همسایهٔ مشترک دارند. ثابت کنید G گرافی منتظم است. چرا برای $s = ۰, ۱$ ممکن است حکم برقرار نباشد؟

۱۲) در گراف سادهٔ G، هر دو رأس غیر مجاور دو همسایهٔ مشترک دارند و هر دو رأس مجاور هیچ همسایهٔ مشترکی ندارند. ثابت کنید G گرافی kـمنتظم است که k در رابطهٔ $p = ۱ + \binom{k+۱}{۲}$ صدق می‌کند.

۱۳) فرض کنید G گرافی $(۳k + ٦)$ـمنتظم با $۱۲k$ رأس باشد و هر دو رأس دقیقاً t همسایهٔ مشترک دارند. k را بیابید.

فصل ۳

گرافهای همبند

۱.۳ مسیر در گراف

تعریف ٦. منظور از یک گشت بین دو رأس u و v در گراف G عبارتست از دنباله‌ای از رأسهای G، مانند

$$u = x_{\circ}, x_{۱}, \ldots, x_{m-۱}, x_m = v$$

به گونه‌ای که به ازای $i = ۱, ۲, \ldots, m$، $x_{i-۱}$ و x_i در G مجاور هستند. به عدد m **طول گشت** می‌گوییم. منظور از یک گذر بین دو رأس u و v، گشتی بین u و v است که یال تکراری ندارد و منظور از یک مسیر بین u و v گشتی بین u و v است که رأس تکراری ندارد.

مثال ۱۲. در گراف شکل ۲، $abaecede$ یک گشت بین a و e، $aedce$ یک گذر بین a و e، و $adce$ یک مسیر بین a و e است.

قضیه ۴. اگر در گراف G، گشتی بین u و v موجود باشد، آنگاه بین u و v مسیری در G موجود است.

اثبات. در میان گشتهای بین u و v فرض کنید P گشتی با کمترین طول باشد. (P وجود دارد ولی ممکن است منحصر بفرد نباشد. چرا؟) مثلاً فرض کنید

$$P:\ u = x_0, x_1, \ldots, x_m = v$$

اگر P مسیر نباشد، در این صورت اندیسهای i و j یافت می‌شوند که $i < j$ و $x_i = x_j$. حال

$$Q:\ u = x_0, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_m = v$$

گشتی بین u و v است که طول آن از طول P کمتر است و این با تعریف P در تناقض است. پس P مسیری بین u و v است. □

قضیه ۵. تعداد مسیرهای به طول ۲ در گراف سادهٔ G برابر است با

$$\binom{d_1}{2} + \binom{d_2}{2} + \cdots + \binom{d_p}{2}$$

که $(d_1, \ldots, d_p)$ دنبالهٔ درجه‌ای G است.

اثبات. چنانچه $V(G) = \{v_1, \ldots, v_p\}$ و $\deg v_i = d_i$ باشد، در این صورت تعداد مسیرهای به طول ۲ که v_i رأس میانی آنها است برابر $\binom{d_i}{2}$ است و لذا تعداد مسیرهای به طول ۲ در G برابر است با

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{d_i}{2}. \square$$

تذکر. توجه کنید در این قضیه تمایزی بین دو مسیر به طول ۲ زیر قایل

نیستیم.

$$P_1: \ a, b, c \quad ; \quad P_2: \ c, b, a.$$

قضیه ٦. (نابرابری حسابی-مربعی) برای عددهای حقیقی $a_1, a_2, \ldots, a_n$، نابرابری زیر برقرار است.

$$(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n})^2 \leq \frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

اثبات.

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (a_i - a_j)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i^2 - 2a_ia_j + a_j^2)$$

$$= (n-1) \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_ia_j$$

$$= n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_ia_j)$$

$$= n(a_1^2 + \cdots + a_n^2) - (a_1 + \cdots + a_n)^2$$

$$\Longrightarrow (\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n})^2 \leq \frac{a_1^2 \cdots + a_n^2}{n}. \square$$

قضیه ۷. تعداد مسیرهای به طول ۲ در گراف سادهٔ G حداقل برابر است با

$$q(\frac{2q}{p} - 1).$$

اثبات. اگر تعداد مسیرهای به طول ۲ در گراف G را با r نشان دهیم، در این صورت

$$r = \sum_{i=1}^{p} \binom{d_i}{2} = \frac{d_1^2 + \cdots + d_p^2}{2} - \frac{d_1 + \cdots + d_p}{2}$$

$$\geq \frac{(d_1 + \cdots + d_p)^2}{2p} - \frac{d_1 + \cdots + d_p}{2}$$

$$= \frac{4q^2}{2p} - \frac{2q}{2} = q(\frac{2q}{p} - 1).\square$$

۲.۳ دور در گراف

تعریف ۷. منظور از یک دور به طول m در گراف G، دنباله‌ای از رأسهای G، مانند

$$x_1, x_2, \cdots, x_m, x_1$$

است به گونه‌ای که $x_1, x_2, \ldots, x_m$ دوبدو متمایزند و

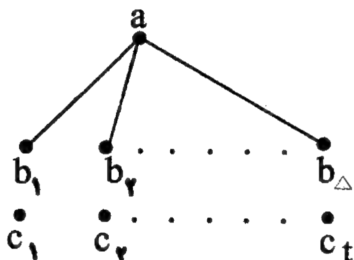
$$x_1x_2, x_2x_3, \ldots, x_{m-1}x_m, x_mx_1 \in E(G)$$

مثال ۱۳. در گراف شکل ۲، $cdec$ یک دور به طول ۳ است.

قضیه ۸. (قضیهٔ توران) اگر گراف سادهٔ G مثلث (دور به طول ۳) نداشته باشد، آنگاه

$$q \leq \lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor.$$

اثبات. فرض کنید a رأسی با درجهٔ Δ و $\{b_۱, \ldots, b_\Delta\}$ مجموعهٔ رأسهای مجاور a و $\{c_۱, \ldots, c_t\}$ مجموعهٔ رأسهای غیر مجاور a باشد. $(t = p - \Delta - ۱)$



شکل ۸

چون گراف مثلث ندارد پس هیچ دوتا از b_iها مجاور نیستند و چون درجهٔ هر c_i حداکثر Δ است، پس

$$q \leq \Delta + t\Delta = (t + ۱)\Delta = (p - \Delta)\Delta$$

$$\leq \frac{(p - \Delta + \Delta)^۲}{۴} = \frac{p^۲}{۴}. \square$$

توجه کنید که در اثبات این قضیه از نابرابری $ab \leq \frac{(a+b)^۲}{۴}$ که معادل با نابرابری $(a-b)^۲ \geq ۰$ است استفاده شد. همچنین منظور از نماد $\lfloor x \rfloor$ در صورت قضیه، بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

قضیه ۹. اگر G گرافی ساده و بدون دور و $q \geq ۱$ باشد، آنگاه G حداقل دو رأس درجهٔ ۱ دارد.

اثبات. در میان مسیرهایی که در G موجودند، فرض کنید P مسیری با بزرگترین طول باشد (P وجود دارد ولی ممکن است منحصر بفرد نباشد. چرا؟) مثلاً فرض کنید

$$P:\ x_۰, x_۱, \ldots, x_n$$

چون $q \geq ۱$، پس $n \geq ۱$ است. ادعا می‌کنیم درجهٔ رأسهای $x_۰$ و x_n در G برابر ۱ است. اگر $\deg x_n \neq ۱$، در این صورت رأس $x_{n+۱}$ غیر از $x_{n-۱}$ موجود است که به x_n متصل است. اگر $x_{n+۱}$ در P ظاهر نشده باشد، در این صورت طول مسیر

$$x_۰, x_۱, \ldots, x_n, x_{n+۱}$$

از طول P بزرگتر است و اگر $x_{n+۱}$ در P ظاهر شده باشد و مثلاً $x_{n+۱} = x_i$، در این صورت

$$x_i, x_{i+۱}, \ldots, x_n, x_i$$

دوری در گراف است که در هر صورت با فرض در تناقض است، پس $\deg x_n = ۱$ و به همین صورت $\deg x_۰ = ۱$ است. پس G حداقل دو رأس درجهٔ ۱ دارد. □

نتیجه. اگر در گراف سادهٔ G، $\delta \geq ۲$ باشد، آنگاه G دور دارد.

۳.۳ گرافهای همبند

تعریف ۸. گراف G را **همبند** گوییم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری موجود باشد ودر غیر این صورت G را **ناهمبند** گوییم.

مثال ۱۴. گراف شکل ۱ ناهمبند و گراف شکل ۲ همبند است.
روی $V(G)$ رابطهٔ $\sim$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.
«$u \sim v$ اگر و تنها اگر مسیری بین u و v در G موجود باشد.»

قضیهٔ ۱۰. رابطهٔ $\sim$ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی $V(G)$ است.

اثبات. به وضوح $\sim$، انعکاسی و تقارنی است. حال فرض کنید $u \sim v$ و $v \sim w$، در این صورت در G مسیری بین u و v و مسیری بین v و w موجود است. چنانچه این دو مسیر را در کنار هم بگذاریم گشتی بین u و w در G پدید می‌آید و لذا بنا به قضیهٔ ۴ بین u و w مسیری در G موجود است و در نتیجه $u \sim w$. پس $\sim$ رابطهٔ هم ارزی است. □

در نتیجه $V(G)$ به کلاسهای هم ارزی افراز می‌شود. به هر کلاس هم‌ارزی یک **مؤلفهٔ همبندی** G می‌گوییم و تعداد مؤلفه‌های همبندی G را با $w(G)$ نمایش می‌دهیم. چنانچه G همبند باشد، $w(G) = 1$ است. تعداد مؤلفه‌های همبندی گراف شکل ۱ برابر ۳ است.

۴.۳ مسایل

۱) فرض کنید در گراف G فقط دو رأس فرد موجود باشد. ثابت کنید مسیری بین این دو رأس در G موجود است.

۲) ثابت کنید در گراف سادهٔ G مسیری به طول $\delta(G)$ موجود است.

۳) اگر G گرافی ساده و $\delta(G) \geq 2$ باشد، ثابت کنید G دوری به طول حداقل $\delta + 1$ دارد.

۴) فرض کنید G گرافی ساده با $2n$ رأس و درجهٔ هر رأس G حداقل n باشد. ثابت کنید در G دوری به طول ۴ وجود دارد. $(n \geq 2)$

۵) برای هر p، گرافی ساده با p رأس و و $\lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor$ یال بسازید که مثلث نداشته باشد.

۶) ثابت کنید گراف سادهٔ G حداقل $\frac{4q}{3p}(q - \frac{p^2}{4})$ مثلث دارد.

۷) فرض کنید $(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ دنبالهٔ درجه‌ای گراف سادهٔ G و m عددی طبیعی باشد که

$$\sum_{i=1}^{p} \binom{d_i}{2} > (m-1)\binom{p}{2}$$

ثابت کنید G شامل دو رأس u و v است که m همسایهٔ مشترک دارند.

۸) هرگاه در گراف سادهٔ G

$$q \geq \frac{1}{2}\sqrt{m-1}\,p^{\frac{3}{2}} + \frac{p}{4}$$

باشد، ثابت کنید G شامل دو رأس u و v است که m همسایهٔ مشترک دارند. $(m \geq 2)$

۹) n نقطه در صفحه موجود است. ثابت کنید حداکثر $\frac{1}{\sqrt{2}}n^{\frac{3}{2}} + \frac{n}{4}$ زوج از این نقاط فاصله‌ای دقیقاً برابر ۱ دارند.

۱۰) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بردارهایی به طول ۱ در صفحه هستند. ثابت کنید حداکثر $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ زوج از آنها را می‌توان یافت که طول مجموع هر زوج از ۱ کوچکتر باشد.

۱۱) فرض کنید n نقطه در صفحه موجود باشد و x عدد حقیقی دلخواهی باشد. ثابت کنید در بین پاره‌خطهای واصل بین این نقاط، حداکثر $\frac{n}{۴}(۱ + \sqrt{۸n - ۷})$ پاره‌خط به طول x وجود دارد. همچنین ثابت کنید در بین این پاره‌خط‌ها حداقل $\frac{۱}{\sqrt{۲}}(\sqrt{n - \frac{۳}{۴}} - \frac{۱}{۲})$ پاره‌خط با طولهای دوبدو متمایز وجود دارد.

۱۲) یک گروه از افراد، ۴۰ جلسهٔ ۱۰ نفری تشکیل داده‌اند به گونه‌ای که هیچ دو نفری در بیش از یک جلسه با هم نبوده‌اند. ثابت کنید تعداد افراد این گروه حداقل ۸۲ نفر است.

۱۳) فرض کنید G گرافی ساده باشد که دور به طول ۴ ندارد. ثابت کنید

$$q \leq \frac{p}{۴}(۱ + \sqrt{۴p - ۳}).$$

۱۴) در یک مسابقه، a نفر شرکت کننده و b داور وجود دارد که $۳ \leq b$ عددی فرد است. هر داور به هر شرکت‌کننده نمرهٔ قبول و یا رد می‌دهد. فرض کنید هر دو داور حداکثر در مورد k شرکت‌کننده نظر یکسان داشته باشند. ثابت کنید

$$\frac{k}{a} \geq \frac{b - ۱}{۲b}.$$

۱۵) فرض کنید G گرافی همبند و ۲ـمنتظم باشد. ثابت کنید G همان C_p است.

۱۶) ثابت کنید گراف G همبند است اگر و تنها اگر برای هر افراز $V(G)$ به دو زیرمجموعهٔ ناتهی $V_۱$ و $V_۲$، یالی از G موجود باشد که یک سر آن در $V_۱$ و سر دیگر در $V_۲$ باشد.

۱۷) ثابت کنید kـمکعب گرافی همبند است.

۱۸) فرض کنید P و Q دو مسیر با بزرگترین طول در گراف همبند G باشند. ثابت P و Q رأس مشترک دارند.

۱۹) اگر G گرافی ساده و $\delta \geq \frac{p-۱}{۲}$ باشد، ثابت کنید G همبند است.

۲۰) اگر G گرافی ساده و $q > \binom{p-۱}{۲}$ باشد، ثابت کنید G همبند است.

۲۱) فرض کنید G گرافی همبند و $e = xy$ یالی از G باشد. ثابت کنید برای هر رأس v از G، مسیری بین v و حداقل یکی از x و y موجود است که شامل یال e نیست.

۲۲) فرض کنید $d_۱ \leq d_۲ \leq \cdots \leq d_p$ درجهٔ رأسهای گراف G باشد. اگر برای $k \leq p - d_p - ۱$، $d_k \geq k$ باشد، ثابت کنید G همبند است.

۲۳) فرض کنید G گرافی ساده و $\delta \geq \frac{p-۱}{۲}$ باشد. ثابت کنید با حذف کمتر از δ یال از G، گراف حاصل همچنان همبند است.

۲۴) فرض کنید G گرافی ساده باشد که $q > \frac{۱}{۲}p\sqrt{p-۱}$ ثابت کنید G دور به طول ۳ یا ۴ دارد.

فصل ۴

گرافهای دوبخشی

۱.۴ زیر گرافها، مکمل گراف و گرافهای یکریخت

تعریف ۹. گراف H را یک زیر گراف G گوییم هرگاه $V(H) \subset V(G)$ و $E(H) \subset E(G)$ باشد. در حالتی که $V(H) = V(G)$ باشد H را یک **زیرگراف فراگیر** G می‌گوییم.

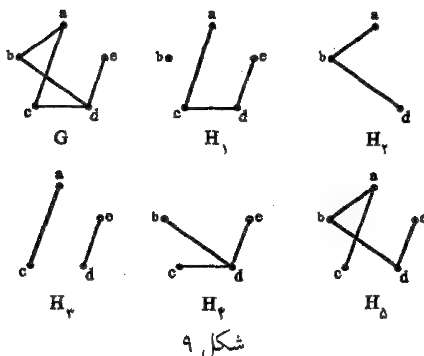
تعریف ۱۰. فرض کنید G یک گراف و S زیر مجموعه‌ای ناتهی از $V(G)$ باشد. منظور از **زیرگراف القایی** $G[S]$ گرافی است که مجموعهٔ رأسهای آن S و مجموعهٔ یالهای آن، یالهایی از G است که دو سر آنها متعلق به S است.

تعریف ۱۱. فرض کنید G یک گراف و L زیر مجموعه‌ای ناتهی از $E(G)$

باشد. منظور از زیرگراف القایی یالی $G[L]$ گرافی است که مجموعهٔ رأسهای آن، رأسهایی از G است که حداقل روی یکی از یالهای L قرار دارند و مجموعهٔ یالهای آن L است.

نماد گذاری. فرض کنید G یک گراف و $S \subsetneqq V(G)$ و $L \subset E(G)$ باشند. منظور از $G - S$، زیر گراف القایی $G[V(G) - S]$ و منظور از $G - L$ زیر گراف فراگیری از G است که مجموعهٔ یالهای آن $E(G) - L$ است. در حالتی که $S = \{v\}$ و $L = \{e\}$ به جای $G - S$ و $G - L$ ازنماد $G - v$ و $G - e$ استفاده می‌کنیم.

مثال ۱۵. در شکل ۹، H_1 یک زیر گراف فراگیر G، $H_2 = G[\{a, b, d\}]$، $H_3 = G[\{ac, de\}]$، $H_4 = G - a$، و $H_5 = G - cd$ است.

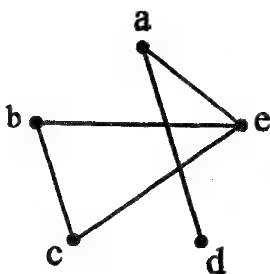


شکل ۹

تعریف ۱۲. فرض کنید G یک گراف ساده باشد. منظور از مکمل گراف G که آن را با $\overline{G}$ نمایش می‌دهیم گرافی ساده است که مجموعهٔ رأسهای آن

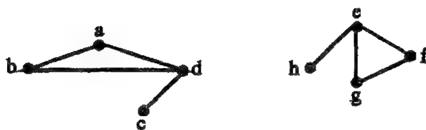
$V(G)$ است و دو رأس در $\overline{G}$ به هم متصلند هرگاه در G متصل نباشند.

مثال ۱۶ . چنانچه G گراف شکل ۹ باشد، نمودار $\overline{G}$ به صورت زیر است.



شکل۱۰

شاید تا کنون خود شما به این نکته توجه کرده‌اید که اغلب خصوصیاتی از گرافها که مورد نظر ماست مستقل از برچسب رأسهای گراف است. مثلاً تعداد رأسها، تعداد یالها، ماکزیمم و مینیمم درجه رأسها، تعداد مسیرهای به طول ۲، طول بزرگترین مسیر، تعداد مثلثها، و ...در یک گراف به برچسب رأسهای گراف بستگی ندارند بلکه به اتصال و عدم اتصال رأسها بستگی دارند. به عنوان مثال در شکل ۱۱ تمام خصوصیات فوق الذکر برای دو گراف G و H یکسان هستند.

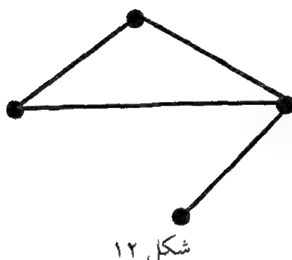


G H

شکل ۱۱

در این حالت می‌گوییم دو گراف G و H یکریخت هستند.

در حقیقت نمودارهای شکل ۱۱ دو برچسب‌گذاری متفاوت برای نمودار شکل ۱۲ هستند.


شکل ۱۲

لذا از این پس به‌جز در موارد خاص که نیاز به برچسب رأسها داریم از نوشتن برچسب رأسها خودداری می‌کنیم، همانطور که در شکلهای ۳، ۴، ۵، و ٦ چنین کردیم.

تعریف ۱۳. فرض کنید G و H دو گراف ساده و $f: V(G) \longrightarrow V(H)$ تابعی یک به یک و پوشا باشد. f را یک یکریختی گوییم هرگاه برای هر دو رأس u و v از G اگر u و v در G مجاور باشند (نباشند)، آنگاه $f(u)$ و $f(v)$ در H مجاور باشند (نباشند).

تعریف ۱۴. دو گراف ساده G و H را یکریخت گویند هرگاه یک یکریختی بین آنها موجود باشد.

به‌طور ساده‌تر، G و H یکریخت هستند هرگاه بتوان نموداری در صفحه کشید که هم نمودار G باشد و هم نمودار H.

۲.۴ فاصله در گراف

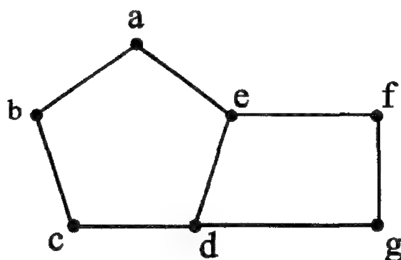
تعریف ۱۵. فرض کنید G گرافی ساده و u و v دو رأس G باشند. منظور از فاصله بین دو رأس u و v که آن را با $d_G(u,v)$ و یا به‌طور ساده‌تر با $d(u,v)$ نمایش می‌دهیم، طول کوتاهترین مسیر بین u و v در G است. اگر بین u و v در G مسیری موجود نباشد، $d(u,v)$ را برابر ∞ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱٦. فرض کنید G گرافی ساده باشد. منظور از **قطر گراف** G، بزرگترین عدد در میان اعداد $d(u,v)$ است که u و v رأسهای G هستند. قطر گراف G را با $\mathrm{diam}\,(G)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۷. فرض کنید G گرافی ساده باشد. منظور از **اندازهٔ کمر گراف** G طول کوچکترین دور در G است. اندازهٔ کمر گراف G را با $g(G)$ نمایش می‌دهیم. اگر G دور نداشته باشد، $g(G)$ را برابر ∞ تعریف می‌کنیم.

مثال ۱۷. فرض کنید G گراف شکل ۱۳ باشد، در این صورت

$$d(a,g) = ۳, diam(G) = ۳, g(G) = ۴.$$



شکل ۱۳

۳.۴ گرافهای دو بخشی

تعریف ۱۸. فرض کنید G یک گراف و $S \subset V(G)$ باشد. S را مستقل گوییم هرگاه هیچ دو رأسی از S در G مجاور نباشند.

مثال ۱۸. در گراف شکل ۱۳، $\{a, c, f\}$ یک مجموعه مستقل است.

تعریف ۱۹. گراف G را دو بخشی گوییم هرگاه رأسهای G را بتوان به دو زیر مجموعهٔ مستقل A و B افراز کرد. در این حالت می‌نویسیم $G = (A, B)$.

مثال ۱۹. دور nتایی C_n به‌ازای nهای زوج دو بخشی است.

تعریف ۲۰. منظور از گراف دو بخشی کامل $K_{m,n}$، گراف سادهٔ دو بخشی (A, B) است که A و B به ترتیب m و n رأس دارند و هر رأس از A به هر رأس از B متصل است. به عنوان مثال نمودار $K_{۲,۳}$ در شکل ۱۴ رسم شده است.



شکل ۱٤

قضیهٔ ۱۱. اگر W یک گشت بسته به طول فرد در گراف سادهٔ G باشد، در این صورت G یک دور فرد دارد.

اثبات. با استقرای قوی روی طول W حکم را ثابت می‌کنیم. اگر طول W برابر ۳ باشد در این صورت W دوری به طول ۳ است و لذا G دوری به طول فرد دارد. فرض کنید طول W برابر n باشد و حکم برای تمام گشتهای بستهٔ به طول فرد کمتر از n درست باشد. (n عددی فرد است.) مثلاً فرض کنید

$$W : x_۱, x_۲, \ldots, x_n, x_۱$$

اگر W یک دور باشد که حکم ثابت است و الا اندیسهای i و j موجودند که $i < j$ و $x_i = x_j$. در این حالت W اجتماع دو گشت بستهٔ $W_۱$ و $W_۲$ است که

$$W_۱ : x_i, x_{i+۱}, \ldots, x_{j-۱}, x_j,$$

$$W_۲ : x_j, x_{j+۱}, \ldots, x_n, x_۱, x_۲, \ldots, x_{i-۱}, x_i$$

حال مجموع طول $W_۱$ و $W_۲$ برابر n است، پس طول $W_۱$ و $W_۲$ از n کمتر است و چون n فرد است طول یکی از گشتهای $W_۱$ و $W_۲$ فرد است. اکنون طبق فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که G شامل دوری به طول فرد است. □

قضیه ۱۲. گراف سادهٔ G دو بخشی است اگر و تنها اگر دور فرد نداشته باشد.

اثبات. اگر $G = (A, B)$ گرافی دو بخشی و $x_۱, x_۲, \ldots, x_n, x_۱$ دوری در G و مثلاً $x_۱ \in A$ باشد در این صورت چون G دو بخشی است در نتیجه

$$x_۲ \in B, x_۳ \in A, x_۴ \in B, \ldots, x_{۲i-۱} \in A, x_{۲i} \in B, \ldots$$

از طرفی $x_۱$ و x_n مجاورند و چون $x_۱ \in A$ پس $x_n \in B$. در نتیجه n عددی زوج است و لذا G دور فرد ندارد. برعکس اگر G همبند باشد و

دور فرد نداشته باشد، a را یک رأس دلخواه از G در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم

$$A = \{v \in V(G) \mid ۲|d(a,v)\},$$

$$B = V(G) - A = \{v \in V(G) \mid ۲ \nmid d(a,v)\}$$

در این صورت A و B، $V(G)$ را افراز می‌کنند. ادعا می‌کنیم A و B هر دو مستقلند. اگر $u, v \in A$ در این صورت طبق تعریف A مسیرهای P و Q به طول زوج وجود دارند که

$$P : a, x_۱, \ldots, x_k, u \quad , \quad Q : a, y_۱, \ldots, y_t, v$$

حال اگر u و v مجاور باشند، طول گشت بستهٔ

$$W : a, x_۱, \ldots, x_k, u, v, y_t, \ldots, y_۱, a$$

فرد است و لذا طبق قضیهٔ ۱۱، G یک دور فرد دارد که با فرض در تناقض است. پس A مستقل است. به‌طور مشابه ثابت می‌شود B نیز مستقل است. (توجه کنید که در اثبات مستقل بودن B از همبند بودن G استفاده می‌شود.)

حال اگر G ناهمبند باشد و دور فرد نداشته باشد، در این صورت طبق بحث اخیر هر مؤلفهٔ همبندی گراف G دو بخشی است و لذا خود G نیز دو بخشی است. (چرا؟) □

قضیه ۱۳. اگر G گرافی ساده باشد، در این صورت زیر گراف فراگیر و دوبخشی H از G موجود است که برای هر رأس v

$$\deg_H v \geq \frac{۱}{۲} \deg_G v.$$

اثبات. در میان زیر گرافهای فراگیر و دو بخشی G، $H = (A, B)$ را طوری می‌گیریم که بیشترین تعداد یال را دارا باشد. در این صورت H شامل تمام یالهایی از G است که یک سر آنها در A و سر دیگر در B است. (چرا؟) اگر رأس v موجود باشد که $\deg_H v < \frac{۱}{۲} \deg_G v$ و مثلاً $v \in A$، در این صورت تعداد همسایه‌های v در A بیش از تعداد همسایه‌های v در B است. قرار می‌دهیم

$$A' = A - \{v\}, B' = B \cup \{v\}$$

H' را زیر گراف فراگیر و دو بخشی از G در نظر می‌گیریم که تمام یالهای G را که یک سر آنها در A' و سر دیگر در B' است شامل باشد. در حقیقت چنانچه در H یالهای متصل به v را حذف و مابقی یالهای متصل به v در G را اضافه کنیم H' بدست می‌آید. حال داریم

$$q(H') = q(H) - \deg_H v + (\deg_G v - \deg_H v) > q(H)$$

که این رابطه با تعریف H در تناقض است. پس برای هر رأس v

$$\deg_H v \geq \frac{۱}{۲} \deg_G v. \square$$

نتیجه. اگر G گرافی ساده باشد، در این صورت زیر گراف فراگیر و دو بخشی H از G موجود است که:

$$q(H) \geq \frac{۱}{۲} q(G)$$

اثبات. بنا به قضیه ۱۳، زیر گراف فراگیر و دو بخشی H از G موجود

است که برای هر رأس v

$$\deg_H v \geq \frac{۱}{۲} \deg_G v$$

در نتیجه

$$q(H) = \frac{۱}{۲} \sum \deg_H v \geq \frac{۱}{۴} \sum \deg_G v = \frac{۱}{۲} q(G).\Box$$

۴.۴ مسایل

۱) نشان دهید $K_۴$، ۱۱ زیر گراف فراگیر دوبدو غیر یکریخت دارد.

۲) فرض کنید G گرافی همبند با حداقل سه رأس باشد که کامل نیست. ثابت کنید G شامل سه رأس u، v، و w است که $uv, vw \in E(G)$ ولی $uw \notin E(G)$.

۳) فرض کنید G گرافی ساده باشد که رأس تنها ندارد و هیچ زیر گراف القایی آن شامل ۲ یال نیست. ثابت کنید G گراف کامل است.

۴) فرض کنید G گرافی همبند باشد که هیچ زیر گراف القایی چهار رأسی آن مسیر چهار رأسی و یا دور ۴ رأسی نیست. ثابت کنید رأسی از G موجود است که به بقیهٔ رأسهای G متصل است.

۵) فرض کنید G گرافی p رأسی و kـمنتظم باشد و $\lfloor \frac{p}{۲} \rfloor + ۱$ رأس از G موجود باشند که زیر گراف القایی روی این رأسها گراف کامل باشد. ثابت کنید G گراف کامل است.

۶) فرض کنید G گرافی ساده با p رأس باشد $(p \geq ۴)$ که زیر گراف القایی روی هر k رأس از G شامل m یال است که $۱ < k < p - ۱$ و m اعداد طبیعی ثابت هستند.

الف) فرض کنید H یک زیر گراف القایی G با ℓ رأس باشد که $\ell \geq k$. ثابت کنید

$$q(H) = m\frac{\binom{\ell}{k}}{\binom{\ell-۲}{k-۲}}$$

ب) ثابت کنید $G = K_p$ یا $G = \overline{K_p}$.

۷) گراف سادهٔ G، $۳n$ رأس دارد و درجهٔ هر رأس آن حداقل $۳n - ۳$ است. ثابت کنید رأسهای G را می‌توان به سه دستهٔ n رأسی افراز کرد به طوری که گراف القایی روی هر دسته، گراف کامل باشد.

۸) چند گراف ۷ رأسی ۴ـمنتظم وجود دارد؟

۹) فرض کنید G گرافی ساده و همبند باشد و هیچ زیر گراف القایی ۴ رأسی آن مسیر ۴ رأسی نباشد. ثابت کنید

$$diam(G) \leq ۲$$

۱۰) اندازهٔ کمر و قطر kـمکعب را بیابید. $(k \geq ۲)$

۱۱) برای هر سه رأس u، v، و w در گراف G ثابت کنید

$$d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$$

۱۲) فرض کنید G گرافی ساده و $\text{diam}(G) = ۲$ و $\Delta = p - ۲$ باشد. ثابت کنید $q \geq ۲p - ۴$.

۱۳) گراف سادهٔ G را خود مکمل گوییم هر گاه G و $\overline{G}$ یکریخت باشند.
الف) هرگاه G گرافی p رأسی و خود مکمل باشد، ثابت کنید

$$p \overset{۴}{\equiv} ۰ \text{ یا } ۱$$

ب) هرگاه G گرافی p رأسی و خود مکمل باشد و $p \overset{۴}{\equiv} ۱$، ثابت کنید G رأسی از درجهٔ $\frac{p-۱}{۲}$ دارد.
ج) برای $p \overset{۴}{\equiv} ۰, ۱$، گرافی p رأسی و خود مکمل مثال بزنید.

۱۴) اگر گراف ساده G ناهمبند باشد، ثابت کنید $\overline{G}$ همبند است و $\text{diam}(\overline{G}) \leq ۲$.

۱۵) هرگاه G گرافی ساده و $\text{diam}(G) \geq ۳$ باشد، ثابت کنید $\overline{G}$ همبند است و $\text{diam}(\overline{G}) \leq ۳$.

۱٦) هرگاه G گرافی ساده و $\text{diam}(\overline{G}) \geq ۴$ باشد، ثابت کنید $\overline{G}$ همبند است و $\text{diam}(\overline{G}) \leq ۲$.

۱۷) فرض کنید G گرافی ساده و همبند باشد به طوری که $\overline{G}$ ناهمبند است. ثابت کنید $q(G) \leq \Delta^۲(G)$.

۱۸) ثابت کنید هر گراف tـمنتظم با اندازهٔ کمر ۴ حداقل $۲t$ رأس دارد و دقیقاً یک گراف tـمنتظم $۲t$ رأسی با اندازهٔ کمر ۴ وجود دارد. $(t \geq ۲)$

۱۹) ثابت کنید هر گراف kـمنتظم با اندازهٔ کمر ۵ حداقل $k^{۲} + ۱$ رأس دارد. به‌ازای $k = ۲, ۳$ گرافی kـمنتظم با اندازهٔ کمر ۵ و $k^{۲} + ۱$ رأس مثال بزنید.

۲۰) هرگاه G گرافی ساده با ٦ رأس باشد، ثابت کنید در G سه رأس مستقل و یا سه رأس دو بدو متصل به یکدیگر یافت می‌شود.

۲۱) هرگاه G گرافی ساده و دو بخشی باشد ثابت کنید $q \leq [\frac{p^{۲}}{۴}]$. به‌ازای هر p گرافی دو بخشی با p رأس و $[\frac{p^{۲}}{۴}]$ یال مثال بزنید.

۲۲) اگر $G = (A, B)$ گرافی دو بخشی و kـمنتظم و $k > ۰$ باشد، ثابت کنید $|A| = |B|$.

۲۳) ثابت کنید kـمکعب گرافی دو بخشی است.

۲۴) فرض کنید S زیر مجموعه‌ای مستقل از رأسهای kـمکعب باشد به طوری که هیچ دو رأس از S به یکدیگر متصل نیستند و همسایهٔ مشترک نیز ندارند. ثابت کنید تعداد اعضای S حداکثر $\frac{۲^k}{k+۱}$ است.

۲۵) ثابت کنید ۲^k بزرگترین عدد طبیعی n است که یالهای K_n را می‌توان به صورت اجتماع یالهای k زیر گراف فراگیر دو بخشی نوشت.

۲٦) فرض کنید G گرافی kـمنتظم و $\operatorname{diam}(G) = d$ باشد. ثابت کنید

$$P(G) \leq ۱ + \frac{k(k-۱)^d - k}{k-۲}.$$

۲۷) یک گراف دو بخشی مثال بزنید که زیر گراف هیچ kـمکعبی نباشد.

۲۸) فرض کنید G گرافی سادّه با حداقل ۴ رأس و $q > \frac{p^۲}{۴}$ باشد. ثابت کنید رأسی از G مانند v وجود دارد که

$$q(G-v) > \frac{(p-۱)^۲}{۴}$$

۲۹) فرض کنید O_k گرافی است که رأسهای آن زیر مجموعه‌های k عضوی $\{۱, ۲, \ldots, ۲k+۱\}$ هستند و دو رأس در O_k مجاورند هرگاه اشتراک آنها تهی باشد.

الف) نشان دهید گراف پترسن و $O_۲$ یکریخت هستند.

ب) ثابت کنید O_k به‌ازای هر k دو بخشی نیست.

ج) ثابت کنید به‌ازای $k \geq ۳$، اندازه کمر O_k برابر ٦ است.

۳۰) اگر G گرافی ساده و همبند و درجهٔ هر رأس G زوج باشد، ثابت کنید برای هر رأس v از G

$$w(G-v) \leq \frac{۱}{۲}\deg v$$

۳۱) فرض کنید G یک گراف ساده باشد به طوری که رأس تنها ندارد و هیچ زیر گراف القایی آن شامل ۳ یال نیست. ثابت کنید G حداکثر ۴ رأس دارد.

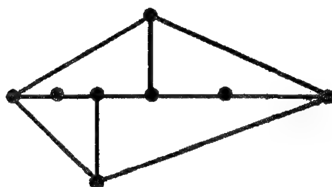
۳۲) تمام زوجهای m و n را طوری تعیین کنید که گراف $K_{m,n}$ شامل دو زیر گراف یکریخت باشد و هر یال $K_{m,n}$ دقیقاً متعلق به یکی از این دو زیر گراف باشد.

۳۳) تمام اعداد طبیعی n را طوری تعیین کنید که گراف K_n شامل سه زیر گراف یکریخت باشد و هر یال K_n دقیقاً متعلق به یکی از این سه زیر گراف باشد.

۳۴) ثابت کنید گراف پترسن شامل سه زیر گراف یکریخت است که یالهای گراف پترسن را افراز می‌کنند.

۳۵) فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد، $n \geq ۴$، و دو رأس i و j مجاورند هرگاه $(i, j) = ۱$. ثابت کنید G همبند است. قطر و اندازهٔ کمر G را بیابید.

۳۶) در گراف شکل زیر یک زیر گراف دو بخشی با بیشترین تعداد یال بیابید. ثابت کنید هیچ زیر گراف دو بخشی دیگری با این تعداد یال موجود نیست.



شکل۱۵

۳۷) ثابت کنید گراف G دو بخشی است اگر و تنها اگر هر زیر گراف H از G شامل مجموعه‌ای مستقل به اندازه $\lceil \frac{p(H)}{۲} \rceil$ باشد.

۳۸) فرض کنید G گرافی ساده و n رأسی شامل a رأس مستقل باشد. G حداکثر چند یال دارد؟

فصل ۵

درختها

۱.۵ یالهای برشی و رأسهای برشی

تعریف ۲۱. گیریم e یالی از گراف G باشد. می‌گوییم e یک **یال برشی** است، هرگاه

$$w(G - e) > w(G)$$

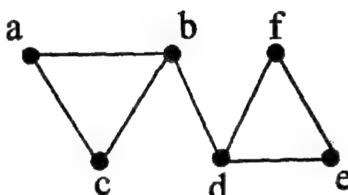
معادلاً تعداد مؤلفه‌های همبندی $G - e$ بیش از تعداد مؤلفه‌های همبندی G باشد.

مثال ۱۹. در گراف شکل (۱٦) bd یک یال برشی است.

قضیهٔ ۱۴. فرض کنید e یالی از گراف G باشد. در این صورت

$$w(G) \leq w(G - e) \leq w(G) + ۱$$

بالاخص یال e برشی است اگر و تنها اگر $w(G-e)=w(G)+۱$.



شکل ۱۶

اثبات. واضح است که حذف یال e از G تعداد مؤلفه‌های همبندی را کم نمی‌کند. در نتیجه $w(G)\leq w(G-e)$.

حال فرض کنید $e=xy$ و G' آن مؤلفهٔ همبندی از G باشد که شامل یال e است. در این صورت G' خود یک گراف همبند است. بنا به مسألهٔ ۲۱ از فصل ۳ برای هر رأس v از G'، مسیری بین v و حداقل یکی از x و y در $G'-e$ موجود است. در نتیجه $G'-e$ حداکثر دو مؤلفهٔ همبندی دارد و لذا

$$w(G-e)=w(G)-۱+w(G'-e)\leq w(G)-۱+۲=w(G)+۱.\square$$

قضیهٔ ۱۵. فرض کنید $e=xy$ یالی از گراف G باشد. در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

الف) e یک یال برشی است.

ب) بین x و y هیچ مسیری در $G-e$ موجود نیست.

ج) e متعلق به هیچ دوری از G نیست.

اثبات. الف $\Leftarrow$ ب) فرض کنید G' آن مؤلفهٔهمبندی از G باشد که شامل یال e است. اگر بین x و y مسیری در $G-e$ موجود باشد، این مسیر حتماً در $G'-e$ قرار دارد.

بنا به مسألهٔ ۲۱ از فصل ۳، برای هر رأس v از G'، بین v و حداقل یکی از x و y مسیری در $G'-e$ موجود است و چون بین x و y نیز مسیری در $G'-e$ موجود است در نتیجه $G'-e$ همبند است و لذا $w(G-e)=w(G)$ و در نتیجه e یال برشی نیست. تناقض حاصل نشان می‌دهد بین x و y مسیری در $G-e$ موجود نیست.

ب $\Leftarrow$ ج) اگر C دوری از G شامل یال e باشد، در این صورت $C-e$ مسیری بین x و y در $G-e$ است که خلاف فرض است. در نتیجه e متعلق به هیچ دوری از G نیست.

ج $\Leftarrow$ الف) اگر e یال برشی نباشد و G' آن مؤلفهٔ همبندی از G باشد که شامل یال e است، نتیجه می‌گیریم $G'-e$ همبند است و لذا مسیری بین x و y در $G'-e$ موجود است. چنانچه یال e را به این مسیر اضافه کنیم دوری در G' شامل e به‌وجود می‌آید و لذا e متعلق به دوری در G است که این خلاف فرض است. در نتیجه e یال برشی است. □

تعریف ۲۲. رأس v از گراف G را برشی گوییم هرگاه

$$w(G-v)>w(G).$$

مثال ۲۰. در گراف شکل ۱۶ رأسهای b و d برشی هستند.

۲.۵ درختها و جنگلها

تعریف ۲۳. منظور از درخت، یک گراف سادهٔ همبند و بدون دور است. به رأس درجهٔ ۱ در درخت، یک برگ می‌گوییم.

تعریف ۲۴. منظور از جنگل، یک گراف سادهٔ بدون دور است. به عبارت دیگر، جنگل گرافی است که هر مؤلفهٔ همبندی آن یک درخت است.

قضیهٔ ۱۶. اگر T درختی با p رأس و q یال و $p \geq ۲$ باشد، آنگاه T حداقل دو برگ دارد و چنانچه v برگی از T باشد، $T - v$ درختی با $p - ۱$ رأس و $q - ۱$ یال است.

اثبات. چون $p \geq ۲$ و T همبند است در نتیجه $q \geq ۱$ است. بنا به قضیهٔ ۹، T حداقل دو برگ دارد. چون T بدون دور است، در نتیجه $T - v$ نیز بدون دور است. همچنین چون T همبند است برای هر دو رأس x و y غیر از v مسیری بین x و y در T وجود دارد و چون $\deg v = ۱$، لذا این مسیر شامل رأس v نیست و لذا این مسیر در $T - v$ نیز قرار دارد. در نتیجه $T - v$ همبند است و لذا $T - v$ درخت است. $T - v$ از حذف رأس v و یال متصل به آن از T به‌دست می‌آید و لذا $T - v$ شامل $p - ۱$ رأس و $q - ۱$ یال است. □

قضیهٔ ۱۷. اگر T درختی با p رأس و q یال باشد، آنگاه $p = q + ۱$.

اثبات. با استقراء روی p حکم را ثابت می‌کنیم. برای $p = ۱$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای درختهای $p - ۱$ رأسی درست باشد و T درختی با p رأس و q یال باشد. ($p > ۱$) بنا به قضیهٔ قبل T شامل برگی

مانند v است. لذا $T - v$ درختی با $p - ۱$ رأس و $q - ۱$ یال می‌باشد. بنا به فرض استقراء

$$p - ۱ = q - ۱ + ۱ \Longrightarrow p = q + ۱.\square$$

قضیهٔ ۱۸. اگر F یک جنگل با p رأس، q یال، و w مؤلفهٔ همبندی باشد، آنگاه $p = q + w$.

اثبات. فرض کنید $T_۱, T_۲, \ldots, T_w$ مؤلفه‌های همبندی F باشند و T_i شامل p_i رأس و q_i یال باشد، $i = ۱, ۲, \ldots, w$. هر T_i یک درخت است و لذا $p_i = q_i + ۱$. در نتیجه

$$p = p_۱ + p_۲ + \cdots + p_w = (q_۱ + ۱) + (q_۲ + ۱) + \cdots + (q_w + ۱) =$$

$$(q_۱ + q_۲ + \cdots + q_w) + w = q + w.\square$$

نتیجه. اگر G گرافی ساده با p رأس و q یال و $p \leq q$ باشد، آنگاه G دور دارد.

اثبات. اگر G دور نداشته باشد یک جنگل است و لذا بنا به قضیهٔ قبل

$$p = q + w > q$$

که با $p \leq q$ در تناقض است و لذا G دور دارد. $\square$

قضیهٔ ۱۹. اگر G گرافی ساده باشد، در این صورت G درخت است اگر و تنها اگر برای هر دو رأس u و v از G، یک مسیر منحصر بفرد بین u و v در G موجود باشد.

اثبات. اگر G درخت باشد، G همبند است و لذا بین هر دو رأس آن مسیری در G موجود است. اگر دو رأس از G موجود باشند که بین آنها

بیش از یک مسیر در G موجود باشد، u و v را آن دو رأسی از G می‌گیریم که بین آنها دو مسیر P و Q در G موجود باشد که مجموع طول P و طول Q کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. در این صورت P وQ به غیر از u و v رأس مشترک دیگری ندارند و لذا از کنار هم قرار دادن آنها یک دور به‌وجود می‌آید. در صورتی که G درخت است و دور ندارد. تناقض حاصل نشان می‌دهد بین هر دو رأس u و v مسیری منحصر بفرد در G موجود است.

برعکس اگر بین هر دو رأس مسیری منحصر بفرد در G موجود باشد، آنگاه G همبند است و دور ندارد. لذا G یک درخت است. □

قضیهٔ ۲۰. گراف سادهٔ F جنگل است اگر و تنها اگر هر یال آن برشی باشد.

اثبات. اگر F جنگل باشد، در این صورت بنا به قضیهٔ ۱۵، هر یال F برشی است.

برعکس اگر هر یال F برشی باشد، بنا به قضیهٔ ۱۵، F دور ندارد و لذا F یک جنگل است. □

قضیهٔ ۲۱. اگر G گرافی ساده و همبند با p رأس و $p-۱$ یال باشد، آنگاه G یک درخت است.

اثبات. اگر G دور داشته باشد و e یالی از این دور باشد، بنا به قضیهٔ ۱۵، $G-e$ همبند است. اگر $G-e$ نیز دور داشته باشد به همین ترتیب عمل می‌کنیم و این کار را آنقدر ادامه می‌دهیم تا زیر گراف فراگیر همبند و بدون دور G' از G حاصل شود. در این صورت G' یک درخت است و لذا

$$p = p(G') = q(G') + ۱ \leq q(G-e) + ۱ = p - ۲ + ۱ = p - ۱$$

که تناقض است. در نتیجه G دور ندارد و چون همبند است پس درخت می‌باشد. □

نتیجه. اگر G گرافی ساده با p رأس و q یال باشد، در این صورت گزاره‌های زیر معادلند.

الف) G درخت است.

ب) G همبند و $p = q + 1$ است.

ج) G بدون دور و $p = q + 1$ است.

د) بین هر دو رأس G مسیری منحصر بفرد در G موجود است.

ه) G همبند و هر یال آن برشی است.

اثبات.

الف $\Leftarrow$ ب) در قضیهٔ ۱۷ ثابت شد.

ب $\Leftarrow$ ج) در قضیهٔ ۲۱ ثابت شد.

ج $\Leftarrow$ الف) بنا به قضیهٔ ۱۸، $w(G) = 1$ و لذا G همبند و در نتیجه درخت است.

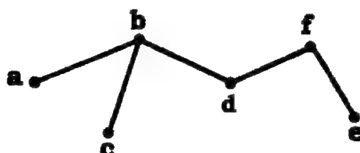
الف $\Longleftrightarrow$ د) در قضیهٔ ۱۹ ثابت شد.

الف $\Longleftrightarrow$ ه) در قضیهٔ ۲۰ ثابت شد. □

تعریف ۲۵. منظور از یک زیر درخت فراگیر از گراف G،

زیر گراف فراگیری از G است که خود یک درخت است.

مثال ۲۱. شکل (۱۷)، نمودار یک زیر درخت فراگیر از گراف شکل ۱۶ را نمایش می‌دهد.



شکل ۱۷

قضیهٔ ۲۲. هر گراف همبند حداقل یک زیر درخت فراگیر دارد.

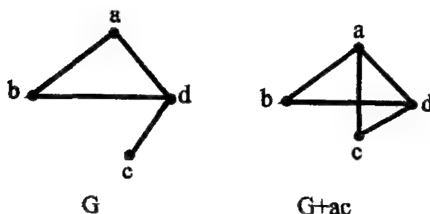
اثبات. فرض کنید G گرافی همبند و T در میان زیر گرافهای فراگیر و همبند G دارای کمترین تعداد یال باشد. اگر T دور داشته باشد و e یالی از این دور باشد در این صورت $T - e$ زیر گرافی فراگیر و همبند از G است که تعداد یالهای آن از تعداد یالهای T کمتر است که با تعریف T در تناقض است. در نتیجه T دور ندارد و لذا T یک درخت است. □

قضیهٔ ۲۳. یال e از گراف همبند G برشی است اگر و تنها اگر e متعلق به هر زیر درخت فراگیر از G باشد.

اثبات. اگر یال e برشی و T زیر درختی فراگیر از G باشد که شامل یال e نیست در این صورت T زیر درختی فراگیر از $G - e$ است و لذا $G - e$ همبند است و در نتیجه یال e برشی نیست که با فرض در تناقض است. برعکس اگر یال e برشی نباشد، $G - e$ گرافی همبند است و لذا زیر درختی فراگیر مانند T دارد. در این صورت T زیر درختی فراگیر از G است که

شامل یال e نیست. □

نمادگذاری. اگر x و y دو رأس از گراف G باشند، منظور از $G + xy$ گرافی است که از افزودن یال xy به G حاصل می‌شود.



شکل ۱۸

قضیهٔ ۲۴. اگر T و T' دو زیر درخت فراگیر از یک گراف همبند G باشند و $e \in E(T) - E(T')$، در این صورت $e' \in E(T') - E(T)$ موجود است که $T - e + e'$ یک زیر درخت فراگیر از G می‌باشد.

اثبات. چون e یال برشی T است، در نتیجه $T - e$ شامل دو مؤلفهٔ همبندی است. فرض کنید A و B مجموعهٔ رأسهای این دو مؤلفهٔ همبندی باشند. در این صورت چون $V(T') = V(T) = A \cup B$ و T' همبند است در نتیجه یال e' از T' موجود است که یک سر آن در A و سر دیگر آن در B است. چون $e \in E(T) - E(T')$ و $e' \in E(T')$ در نتیجه $e \neq e'$.

همچنین e تنها یالی از T است که یک سر آن در A و سر دیگرش در B است و لذا $e' \in E(T') - E(T)$. حال $T - e + e'$ گرافی همبند شامل p رأس و $p - ۱$ یال است و لذا بنا به قضیهٔ ۲۱، $T - e + e'$ یک زیر درخت فراگیر از G است. □

قضیهٔ ۲۵. اگر T و T' دو زیر درخت فراگیر از G باشند و $e \in E(T) - E(T')$، آنگاه $e' \in E(T') - E(T)$ موجود است که

$T' + e - e'$ یک زیر درخت فراگیر از G می‌باشد.

اثبات. چون T' همبند است و $e \notin E(T')$، در نتیجه $T' + e$ شامل دوری مانند C است که e متعلق به C می‌باشد. حال چون T دور ندارد لذا یال e' در C موجود است که در T نیست. در نتیجه $e' \in E(T') - E(T)$. چون e' متعلق به دوری در گراف $T' + e$ است، در نتیجه یال برشی این گراف نیست و لذا $T' + e - e'$ همبند است. حال $T' + e - e'$ گرافی همبند شامل p رأس و $p - ۱$ یال است و لذا $T' + e - e'$ زیر درختی فراگیر از G است. □

قضیهٔ ۲۶. اگر T یک درخت شامل k یال و G گرافی ساده با $\delta(G) \geq k$ باشد، آنگاه T با زیر گرافی از G یکریخت است.

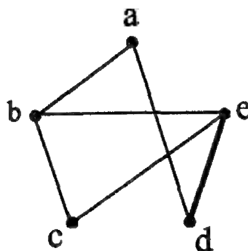
اثبات. با استقراء روی k حکم را ثابت می‌کنیم. حکم برای $k = ۰$ واضح است. فرض کنید حکم برای $k - ۱$ درست باشد و T درختی شامل k یال و G گرافی ساده با $\delta(G) \geq k$ باشد $(k > ۰)$. بنا به قضیهٔ ۱۶، T شامل برگی مانند v است. در این صورت $T - v$ درختی شامل $k - ۱$ یال است. چون $\delta(G) \geq k > k - ۱$، بنا به فرض استقراء، $T - v$ با زیر گرافی از G مانند H یکریخت است.

اگر u رأس مجاور v در T و u' رأس متناظر u در H باشد، در این صورت چون $\deg_G u' \geq k$ و H شامل $k - ۱$ یال است، لذا رأس v' در G موجود است که $v' \notin V(H)$ و u' و v' در G مجاورند. چنانچه به گراف H رأس v و یال uv را بیافزاییم زیر گرافی از G یکریخت با T بدست می آید و حکم بدین ترتیب ثابت می‌شود. □

تعریف ۲۶. فرض کنید u رأسی از گراف G باشد. به عدد $\epsilon(u) = \max_{v \in V} d(u, v)$ خروج از مرکز رأس u می‌گوییم. همچنین شعاع

G را برابر $\rho(G) = \min_{u\in V} \epsilon(u)$ تعریف می‌کنیم. به رأسی که خروج از مرکز آن برابر شعاع گراف باشد، یک مرکز G می‌گوییم.

مثال ۲۲. در گراف شکل زیر، $\epsilon(a) = ۲$، $\rho(G) = ۲$، و هر رأس یک مرکز گراف است.



شکل ۱۹

قضیهٔ ۲۷. فرض کنید T یک درخت و v رأسی از آن باشد. در این صورت v یک رأس برشی T است اگر و تنها اگر $\deg v > ۱$ باشد.

اثبات. اگر $\deg v > ۱$، آنگاه رأسهای u و w مجاور v در T وجود دارند. لذا uvw یک مسیر بین u و w در T است. چون T درخت است لذا بین u و w یک مسیر منحصر بفرد در T وجود دارد و لذا بین u و w در $T - v$ هیچ مسیری موجود نیست و لذا $T - v$ ناهمبند است و در نتیجه v یک رأس برشی T است. برعکس اگر $\deg v = ۱$، در این صورت $T - v$ درخت است و علی الخصوص همبند است و در نتیجه v رأس برشی T نیست. همچنین اگر $\deg v = ۰$، در این صورت T درختی تک رأسی است و رأس برشی ندارد. □

قضیهٔ ۲۸. هر درخت دقیقاً یک مرکز و یا دو مرکز مجاور دارد.

اثبات. با استقراء روی p، تعداد رأسهای درخت، حکم را ثابت می‌کنیم. برای $p = ۱, ۲$ حکم واضح است. فرض کنید $p > ۲$ و حکم برای تمام

درختهای با کمتر از p رأس درست باشد و T درختی p رأسی باشد. اگر T' زیر گرافی از T باشد که از حذف تمام برگهای T به‌دست آمده باشد، در این صورت بنا به قضیهٔ ۲۷، T' خود یک درخت است. چنانچه u رأسی از یک درخت باشد، هر رأسی که فاصلهٔ آن از u ماکزیمم مقدار ممکن را داشته باشد یک برگ است. حال چون همهٔ برگهای T حذف شده‌اند، نتیجه می‌گیریم که برای هر $u \in V(T')$، $\epsilon_{T'}(u) = \epsilon_T(u) - ۱$.

همچنین خروج از مرکز هر برگ از خروج از مرکز همسایه‌هایش بزرگتر است. بنابراین رأسهایی که $\epsilon_T(u)$ را می‌نیمم می‌کنند $\epsilon_{T'}(u)$ را نیز مینیمم می‌کنند. بنابراین مرکزهای T و T' یکی هستند و لذا طبق فرض استقراء در مورد T'، نتیجه می‌گیریم T دقیقاً یک مرکز و یا دو مرکز مجاور دارد. □

قضیهٔ ۲۹. اگر F یک جنگل با $۲k$ رأس فرد باشد، آنگاه $E(F)$ را می‌توان به صورت اجتماع k مسیر مجزای یالی نوشت.

اثبات. با استقراء روی k حکم را ثابت می‌کنیم. چون F بدون دور است اگر $q(F) \geq ۱$، در این صورت F حداقل شامل یک رأس درجه ۱ است و در نتیجه F رأس فرد دارد. حال اگر $k = ۰$، در این صورت طبق بحث اخیر F یال ندارد و لذا حکم برای $k = ۰$ درست است. حال اگر $k > ۰$ و حکم برای $k - ۱$ درست باشد و F یک جنگل با $۲k$ رأس فرد باشد، T را آن مؤلفهٔ همبندی از F می‌گیریم که حداقل یک یال دارد. در این صورت T یک درخت است و لذا حداقل دو برگ مانند u و v دارد.

فرض کنید P یکتا مسیر بین u و v در T باشد. در این صورت درجهٔ هر رأس در P به غیر از u و v برابر ۲ است و لذا چنانچه یالهای P را از F حذف کنیم جنگلی با $۲k - ۲ = ۲(k - ۱)$ رأس فرد به‌دست می‌آید.

حال طبق فرض استقراء یالهای این جنگل را می‌توان به صورت اجتماع $k-۱$ مسیر مجزای یالی نوشت و لذا چنانچه P را به این مسیرها بیافزاییم نتیجه می‌شود که $E(F)$ را می‌توان به صورت اجتماع k مسیر مجزای یالی نوشت. □

قضیهٔ ۳۰. اگر u رأسی از درخت n رأسی T باشد، آنگاه

$$\sum_{v\in V} d(u,v) \leq \binom{n}{۲}$$

اثبات. با استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای $n = ۱, ۲$ حکم واضح است. اگر $n > ۲$ و حکم برای درختهای $n-۱$ رأسی درست باشد و T درختی n رأسی و u رأسی از T باشد، در این صورت T شامل برگی مانند w است که $w \neq u$. حال $T-w$ درختی $n-۱$ رأسی و u رأسی از $T-w$ است. اگر $T' = T-w$، در این صورت بنا به فرض استقراء

$$\sum_{v\in V(T')} d_{T'}(u,v) \leq \binom{n-۱}{۲}$$

برای هر رأس v از T'، یکتا مسیر بین u و v در T'، یکتا مسیر بین u و v در T نیز هست و لذا $d_{T'}(u,v) = d_T(u,v)$. همچنین چون T درختی n رأسی است، لذا $d_T(u,w) \leq n-۱$ و در نتیجه

$$\sum_{v\in V(T)} d_T(u,v) = d_T(u,w) + \sum_{v\in V(T')} d_T(u,v) = d_T(u,w)+$$

$$\sum_{v\in V(T')} d_{T'}(u,v) \leq n-۱+\binom{n-۱}{۲} = \binom{n}{۲}.\square$$

می‌خواهیم ببینیم تساوی در قضیهٔ فوق چه موقع اتفاق می‌افتد. فرض کنید P_n مسیر n رأسی و u برگی از P_n باشد، در این صورت

$$\sum_{v\in V(P_n)} d(u,v) = ۰ + ۱ + ۲ + \cdots + (n-۱) = \binom{n}{۲}$$

عکس این مطلب نیز درست است.

قضیهٔ ۳۱. هرگاه T یک درخت n رأسی و u رأسی از T باشد که

$$\sum_{v\in V(T)} d(u,v) = \binom{n}{۲}$$

آنگاه T با مسیر n رأسی P_n یکریخت و u برگی از T است.

اثبات. برای $n = ۱,۲$ حکم واضح است. اگر $n > ۲$ و w برگی از T باشد که $u \neq w$، در این صورت همانند استدلال قضیهٔ ۳۰

$$\sum_{\substack{v\in V(T)\\ v\neq w}} d(u,v) \leq \binom{n-۱}{۲}$$

همچنین چون T درختی n رأسی است، لذا $d(u,w) \leq n-۱$. در نتیجه

$$\binom{n}{۲} = \sum_{v\in V(T)} d(u,v) = d(u,w) + \sum_{v\neq w} d(u,v)$$

$$\leq (n-۱) + \binom{n-۱}{۲} = \binom{n}{۲}$$

در نتیجه $d(u,w) = n-۱$ و لذا بین u و w مسیری n رأسی در T وجود دارد. چون خود T، n رأسی است، در نتیجه T مسیری n رأسی است و u نیز برگی از آن است. □

۳.۵ مسایل

۱) ثابت کنید هر گراف با n رأس و k یال، حداقل $n-k$ مؤلفهٔ همبندی دارد.

۲) فرض کنید v رأسی از گراف همبند G باشد. ثابت کنید هر مؤلفهٔ همبندی $G-v$ شامل رأسی مجاور v است و نتیجه بگیرید هیچ گرافی رأس برشی از درجهٔ ۱ ندارد.

۳) فرض کنید v یک رأس برشی گراف G باشد. ثابت کنید $\overline{G}-v$ همبند است و نتیجه بگیرید v رأس برشی $\overline{G}$ نیست.

۴) فرض کنید G گرافی همبند با بیش از یک رأس باشد. ثابت کنید G حداقل دو رأس دارد که برشی نیستند.

۵) فرض کنید G گرافی همبند با بیش از دو رأس باشد. همچنین هیچ دو رأس درجهٔ ۱ در G همسایهٔ مشترک ندارند. ثابت کنید G شامل دو رأس مجاور است که حذف آنها G را ناهمبند نمی‌کند.

۶) الف) گرافی همبند و ۳ـمنتظم مثال بزنید که یال برشی داشته باشد.

ب) به‌ازای هر k، گرافی همبند و $2k+1$ـمنتظم مثال بزنید که یال برشی داشته باشد.

۷) فرض کنید G گرافی همبند و درجهٔ هر رأس از G زوج باشد. ثابت کنید G یال برشی ندارد.

۸) فرض کنید G گرافی همبند، دو بخشی و kـمنتظم باشد. $(k \geq ۱)$ ثابت کنید G یال برشی ندارد.

۹) الف) فرض کنید H زیر گرافی از G باشد. ثابت کنید برای هر دو رأس u و v از H

$$d_G(u, v) \leq d_H(u, v)$$

ب) اگر u رأسی از گراف همبند و n رأسی G باشد، ثابت کنید

$$\sum_{v \in V(G)} d(u, v) \leq \binom{n}{۲}.$$

۱۰) نمودار همهٔ درختهای حداکثر ۶ رأسی را رسم کنید.

۱۱) فرض کنید G یک درخت است. ثابت کنید برای هر یال e از $\overline{G}$، $G + e$ دقیقاً شامل یک دور است.

۱۲) فرض کنید T درختی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد. $(\Delta \geq ۱)$ ثابت کنید T حداقل Δ برگ دارد.

۱۳) فرض کنید T یک درخت n رأسی و تعداد رأسهای از درجهٔ i در T برابر a_i باشد. $\sum ia_i$ را بر حسب n بیابید.

۱۴) فرض کنید T یک درخت و میانگین درجهٔ رأسهای T برابر a باشد. T چند رأس دارد؟

۱۵) فرض کنید T یک درخت شامل t برگ و درجهٔ مابقی رأسهای T به ترتیب برابر $۲, ۳, \ldots, k$ باشد. t چند است؟

۱٦) فرض کنید $n \geq ۲$ و $d_۱, d_۲, \ldots, d_n$ اعداد طبیعی باشند به طوری که $\sum_{i=۱}^{n} d_i = ۲n - ۲$. ثابت کنید درخت T با دنبالهٔ درجه‌ای $(d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ موجود است.

۱۷) فرض کنید T یک درخت باحداقل ۲ رأس باشد به‌گونه‌ای که درجهٔ هر رأس مجاور با برگی از T حداقل ۳ است. ثابت کنید T شامل دو برگ است که همسایهٔ مشترک دارند.

۱۸) فرض کنید G گرافی ساده، همبند و شامل n رأس باشد که به غیر از دو رأس آن، مابقی رأسها برشی هستند. $(n \geq ۲)$ ثابت کنید G و P_n یکریخت هستند.

۱۹) فرض کنید e یالی از گراف ساده و همبند G باشد. ثابت کنید زیر درخت فراگیری از G شامل e وجود دارد.

۲۰) فرض کنید G یک گراف همبند با n رأس باشد. ثابت کنید G دقیقاً یک دور دارد اگر و تنها اگر دقیقاً n یال داشته باشد.

۲۱) فرض کنید تعداد رأسهای درخت T عددی زوج باشد. ثابت کنید T دقیقاً یک زیر گراف فراگیر مانند H دارد که درجهٔ هر رأس H عددی فرد است.

۲۲) فرض کنید T و T' دو زیر درخت فراگیر از گراف همبند G باشند و $e \in E(T) - E(T')$. ثابت کنید $e' \in E(T') - E(T)$ وجود دارد که $T' + e - e'$ و $T - e + e'$ هر دو زیر درختی فراگیر از G هستند.

۲۳) فرض کنید T یک زیر درخت فراگیر از گراف همبند G باشد. ثابت کنید T زیر گرافی فراگیر مانند H دارد که برای هر رأس v از G،

$$\deg_H v \stackrel{۲}{\equiv} \deg_G v$$

۲۴) ثابت کنید F یک جنگل است اگر و تنها اگر هر زیر گراف القایی F، رأسی با درجهٔ حداکثر ۱ داشته باشد.

۲۵) ثابت کنید F یک جنگل است اگر و تنها اگر هر زیر گراف همبند آن القایی باشد.

۲۶) فرض کنید G گرافی همبند و G' گرافی باشد که رأسهای آن زیر درختهای فراگیر G هستند و دو رأس t و t' در G' مجاورند هرگاه t و t' در G دقیقاً در $n - ۲$ یال مشترک باشند. ثابت کنید G' همبند است. همچنین $d_{G'}(t, t')$ برابر تعداد یالهایی از t است که در t' نیست. یعنی $d_{G'}(t, t') = |E(t) - E(t')|$.

۲۷) بدون استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید هر درخت دقیقاً یک مرکز و یا دو مرکز مجاور دارد.

۲۸) فرض کنید رأس x با دو رأس y و z در درخت T مجاور باشد. ثابت کنید

$$۲\epsilon(x) \leq \epsilon(y) + \epsilon(z)$$

۲۹) الف) فرض کنید G گرافی همبند باشد. ثابت کنید

$$diam(G) \leq ۲\rho(G).$$

ب) ثابت کنید درخت T دقیقاً یک مرکز دارد اگر و تنها اگر $\mathrm{diam}(T) = ۲p(T)$ باشد.

۳۰) فرض کنید G یک گراف همبند و x رأسی از G باشد و

$$s(x) = \sum_{v \in V(G)} d(x, v).$$

الف) اگر G یک درخت و y و z دو رأس مجاور x باشند، ثابت کنید $۲s(x) < s(y) + s(z)$.

ب) اگر G یک درخت باشد، ثابت کنید $s(x)$ کمترین مقدار خود را به‌ازای یک رأس و یا دو رأس مجاور می‌گیرد.

۳۱) فرض کنید T یک درخت n رأسی و

$$W(T) = \sum_{x,y \in V(T)} d(x, y)$$

کمترین و بیشترین مقدار $W(T)$ را تعیین کنید. $W(T)$ به‌ازای کدام درختها کمترین و بیشترین مقدار خود را اختیار می‌کند.

۳۲) فرض کنید $G_۱, G_۲, \ldots, G_k$ زیر درختهایی از درخت G باشند به‌گونه‌ای هر دو تا از آنها حداقل در یک رأس مشترک هستند. ثابت کنید رأسی وجود دارد که متعلق به همهٔ این زیر درختها است.

۳۳) فرض کنید S مجموعه‌ای n عضوی و $A_1, A_2, \ldots, A_n$ زیر مجموعه‌هایی از S باشند که دو به دو متمایزند. ثابت کنید $x \in S$ موجود است که زیرمجموعه‌های $A_1 \cup \{x\}, \ldots, A_n \cup \{x\}$ نیز دو به دو متمایزند.

۳۴) فرض کنید $T_1, T_2, \ldots, T_k$ زیر درختهایی فراگیر از گراف ساده G باشند به‌گونه‌ای که هیچ دوتایی شامل یال مشترکی نیستند. ثابت کنید برای هر افراز $V(G)$ به n زیر مجموعهٔ ناتهی $V_1, V_2, \ldots, V_n$ تعداد یالهایی از G که دو سر آنها متعلق به دو قسمت متفاوت باشد حداقل برابر $k(n-1)$ است.

۳۵) در هر خانه از یک جدول $n \times n$ حرفی می‌گذاریم. اگر هیچ دو سطری از این جدول یکسان نباشند، ثابت کنید ستونی از جدول وجود دارد که با حذف آن باز هم سطرهای جدول متفاوتند.

۳۶) فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$، $n \geq 3$، باشد و $H_i = G - v_i$، $i = 1, 2, \ldots, n$. ثابت کنید G همبند است اگر و تنها اگر حداقل دو تا از H_i ها همبند باشند.

۳۷) فرض کنید G گرافی همبند با حداقل سه رأس باشد. اگر G یال برشی داشته باشد، ثابت کنید رأس برشی نیز دارد.

فصل ۶

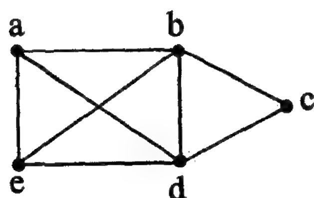
گرافهای اولری و هامیلتونی

۱.۶ گرافهای اولری

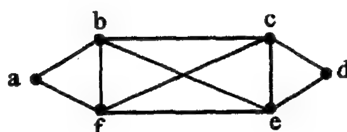
تعریف ۲۷. منظور از یک گذر اولری در گراف G، گذری است که شامل تمام یالهای G است و منظور از یک تور اولری در گراف G، گذر بسته‌ای است که شامل تمام یالهای G است.
گراف G را نیمه اولری گوییم هرگاه گذر اولری داشته باشد و اولری گوییم هرگاه تور اولری داشته باشد.

مثال ۲۳. در گراف شکل (۲۰) $abcdbedae$ یک گذر اولری است و لذا این گراف، نیمه اولری است.

مثال ۲۴. در گراف شکل (۲۱) $abcdefcebfa$ یک تور اولری است و لذا این گراف، اولری است.



شکل ۲۰



شکل ۲۱

قضیه ۳۲. گراف همبند G اولری است اگر و تنها اگر درجهٔ هر رأس G عددی زوج باشد.

اثبات. اگر G اولری باشد، در این صورت تور اولری دارد. مثلاً

$$P : v_1, v_2, \ldots, v_q, v_1$$

یک تور اولری از G است. حال برای رأس v، به هنگام پیمودن تور اولری، هرگاه به رأس v می‌رسیم، با یک یال به v وارد و با یک یال از v خارج می‌شویم. چون هر یال G دقیقاً یکبار در P ظاهر شده است نتیجه می‌گیریم درجهٔ هر رأس عددی زوج است.

اگر عکس این مطلب درست نباشد، در این صورت گراف همبند و غیر اولری وجود دارد که هر رأس آن زوج است. در میان چنین گرافهایی، G را طوری می‌گیریم که کمترین تعداد یال را داشته باشد. چون G همبند و هر رأس آن زوج است، $\delta(G) \geq 2$ و لذا بنا به نتیجهٔ قضیهٔ ۹، G دور و در نتیجه گذر بسته دارد. در میان گذرهای بسته در G، P را طوری می‌گیریم که دارای بیشترین تعداد یال باشد. چون G اولری نیست لذا P شامل همهٔ یالهای G نیست.

همچنین چون P گذر بسته‌ای از G است درجهٔ هر رأس $G - E(P)$ عددی زوج است. اگر G' یک مؤلفهٔ همبندی $G - E(P)$ باشد که شامل یال است در این صورت چون G' همبند و درجهٔ هر رأس آن زوج است و $q(G') < q(G)$، لذا G' اولری است. در نتیجه G' یک تور اولری مانند Q دارد. چون G' یک مؤلفهٔ همبندی $G - E(P)$ و G همبند است در نتیجه P و Q رأس مشترکی مانند v دارند. بدون از دست دادن کلیت می‌توانیم فرض کنیم که P و Q هر دو از v شروع و به v ختم می‌شوند. حال چنانچه P و Q را کنار هم بگذاریم یک گذر بسته در G به‌دست می‌آید که تعداد یالهای آن از تعداد یالهای P بیشتر است و این با تعریف P در تناقض است. تناقض حاصل حکم قضیه را ثابت می‌کند. □

قضیه ۳۳. گراف همبند G نیمه اولری است اگر و تنها اگر حداکثر دو رأس G فرد باشند.

اثبات. اگر G نیمه اولری باشد، گذر

$$P : v_1, v_2, \ldots, v_q, v_{q+1}$$

شامل همهٔ یالهای G وجود دارد. اگر $v_{q+1} = v_1$، در این صورت P یک تور اولری است و لذا طبق قضیهٔ قبل، هر رأس G زوج است. اگر $v_1 \neq v_{q+1}$، رأسی مانند w به G می‌افزاییم و آن را به v_1 و v_{q+1} وصل می‌کنیم و گراف حاصل را G' می‌نامیم. در این صورت

$$Q : v_1, v_2, \ldots, v_q, v_{q+1}, w, v_1$$

یک تور اولری در گراف G' است. لذا طبق قضیهٔ قبل، هر رأس G' زوج است و لذا به غیر از v_1 و v_{q+1}، هر رأس دیگر G زوج است. در نتیجه G حداکثر دو رأس فرد دارد.

بر عکس اگر G حداکثر دو رأس فرد داشته باشد، در این صورت G یا دو رأس فرد دارد و یا رأس فرد ندارد. اگر G رأس فرد نداشته باشد، بنا به قضیهٔ قبل G اولری و در نتیجه نیمه اولری است. اگر G دو رأس فرد داشته باشد و u و v دو رأس فرد آن باشند، رأس w را به G اضافه می‌کنیم و آن را به u و v وصل می‌کنیم و گراف حاصل را G' می‌نامیم. در این صورت G' گرافی همبند و هر رأس آن زوج است و لذا اولری است. در نتیجه G' یک تور اولری مانند Q دارد. چون $\deg w = ۲$، می‌توانیم فرض کنیم Q به صورت

$$Q : u, x_۱, \ldots, x_k, v, w, u$$

است. در این صورت

$$P : u, x_۱, \ldots, x_k, v$$

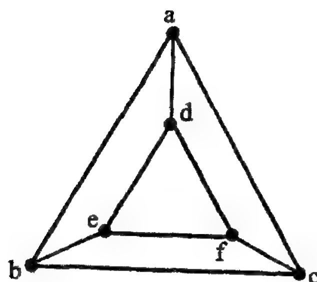
یک گذر اولری G است و لذا G نیمه اولری است. □

۲.۶ گرافهای هامیلتونی

تعریف ۲۸. منظور از یک مسیر هامیلتونی در گراف G، مسیری شامل همهٔ رأسهای G است و منظور از یک دور هامیلتونی در G، دوری شامل همهٔ رأسهای G است. گراف G را هامیلتونی می‌گوییم هرگاه دور هامیلتونی داشته باشد.

مثال ۲۵. در گراف شکل زیر $abcfeda$ یک دور هامیلتونی است و لذا این

گراف هامیلتونی است.



شکل ۲۲

قضیه ۳۴. اگر گراف سادهٔ G هامیلتونی باشد، در این صورت برای هر $S \subset V(G)$، $G - S$ حداکثر $|S|$ مؤلفهٔ همبندی دارد.

اثبات. اگر C یک دور هامیلتونی باشد، در این صورت $V(G) = V(C)$. حال برای هر $S \subset V(C)$، $C - S$ گرافی متشکل از حداکثر $|S|$ مسیر است. چون $C - S$ زیر گرافی فراگیر از $G - S$ است لذا $G - S$ حداکثر $|S|$ مؤلفهٔ همبندی دارد. □

نتیجه. اگر گراف سادهٔ G هامیلتونی باشد، در این صورت G رأس برشی ندارد.

اثبات. اگر v رأسی از G باشد، بنا به قضیهٔ قبل $G - v$ حداکثر یک مؤلفه همبندی دارد و لذا $G - v$ همبند است و در نتیجه v رأس برشی نیست. پس G رأس برشی ندارد. □

قضیه ۳۵. اگر G یک گراف سادهٔ n رأسی باشد به طوری که برای هر دو رأس غیر مجاور u و v، $\deg u + \deg v \geq n$ باشد، در این صورت G هامیلتونی است. $(n \geq ۳)$

اثبات. فرض کنید حکم مسأله درست نباشد. در میان گرافهای n رأسی که در فرض قضیه صدق می‌کنند و هامیلتونی نیستند، H را طوری می‌گیریم که دارای بیشترین تعداد یال باشد. چون H هامیلتونی نیست لذا دو رأس u و v در H وجود دارند که مجاور نیستند. طبق تعریف H، $H + uv$ هامیلتونی است و هر دور هامیلتونی آن شامل یال uv است. فرض کنید

$$C : u, x_{۱}, \ldots, x_{n-۲}, v, u$$

یک دور هامیلتونی از $H + uv$ باشد، در این صورت

$$P : u, x_{۱}, \ldots, x_{n-۲}, v$$

یک مسیر هامیلتونی در H است. اگر $T = \{i | vx_i \in E(H)\}$ و $S = \{i | ux_{i+۱} \in E(H)\}$ در این صورت چون $\deg u + \deg v \geq n$ و u و v در H مجاور نیستند، لذا $|S| + |T| \geq n - ۱$ همچنین $S, T \subset \{۱, ۲, \ldots, n - ۲\}$ و لذا $|S \cup T| \leq n - ۲$ در نتیجه

$$|S \cap T| = |S| + |T| - |S \cup T| \geq ۱$$

لذا $S \cap T \neq \emptyset$ و مثلاً $i \in S \cap T$. لذا $ux_{i+۱}, vx_i \in E(H)$ و در نتیجه

$$u, x_{۱}, \ldots, x_i, v, x_{n-۲}, \ldots, x_{i+۱}, u$$

یک دور هامیلتونی در گراف H است. ولی این با تعریف H در تناقض است. تناقض حاصل حکم قضیه را ثابت می‌کند. □

نتیجه (قضیهٔ دیراک). اگر در گراف سادهٔ n رأسی G، $\delta \geq \frac{n}{۲}$ باشد، در این صورت G هامیلتونی است.

قضیهٔ ۳۶. اگر G یک گراف سادهٔ n رأسی و u و v دو رأس غیر مجاور G باشند که $\deg u + \deg v \geq n$، در این صورت G هامیلتونی است اگر و تنها اگر $G + uv$ هامیلتونی باشد.

اثبات. اگر G هامیلتونی باشد، به‌وضوح $G + uv$ نیز هامیلتونی است. برعکس اگر $G + uv$ هامیلتونی باشد، دقیقاً مشابه اثبات قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود G نیز هامیلتونی است. □

قضیهٔ ۳۷. اگر G یک گراف ساده و $d_۱ \leq d_۲ \leq \cdots \leq d_n$، $n \geq ۳$، درجهٔ رأسهای G باشند به طوری که برای $i < \frac{n}{۲}$، $d_i > i$ یا $d_{n-i} \geq n - i$ است. در این صورت G هامیلتونی است.

اثبات. فرض کنید حکم قضیه درست نباشد. در میان گرافهای n رأسی که در فرض قضیه صدق می‌کنند و هامیلتونی نیستند، G را طوری انتخاب می‌کنیم که دارای بیشترین تعداد یال باشد. چون G هامیلتونی نیست، حداقل ۲ رأس غیر مجاور دارد. در میان زوج رأسهای غیر مجاور در G، u و v را طوری انتخاب می‌کنیم که $\deg u + \deg v$ بیشترین مقدار را داشته باشد. چون G هامیلتونی نیست و $G + uv$ هامیلتونی است، لذا بنا به قضیهٔ قبل $\deg u + \deg v < n$.

فرض کنید $\deg u \leq \deg v$. در این صورت $\deg u < \frac{n}{۲}$. حال اگر $i = \deg u$ باشد، در این صورت بنا به تعریف u و v، درجهٔ هر رأس غیر مجاور با v، حداکثر i است و لذا درجهٔ حداقل $n - ۱ - \deg v$ رأس از G حداکثر i است. مشابهاً اگر $j = \deg v$ باشد در این صورت درجهٔ حداقل $n - ۱ - \deg u$ رأس از G غیر از u حداکثر j است و چون $\deg u = i \leq j$، لذا درجهٔ حداقل $n - \deg u$ رأس از G حداکثر j است. حال چون $i < \frac{n}{۲}$، لذا بنا به فرض $d_i > i$ یا $d_{n-i} \geq n - i$ است. اگر $d_i > i$، در این صورت

درجهٔ حداکثر $i - ۱$ رأس از G کوچکتر یا مساوی i است و لذا بنا به نتیجهٔ قبلی

$$n - ۱ - \deg v \leq i - ۱ = \deg u - ۱ \Longrightarrow \deg u + \deg v \geq n$$

که با $\deg u + \deg v < n$ در تناقض است. همچنین اگر $d_{n-i} \geq n - i$، آنگاه درجهٔ حداکثر $n - i - ۱$ رأس از G کوچکتر از $n - i$ است. از طرفی داریم

$$j = \deg v < n - \deg u = n - i$$

و چون درجه حداقل $n - \deg u$ رأس از G حداکثر j است، در نتیجه

$$n - \deg u \leq n - i - ۱ = n - \deg u - ۱$$

که تناقض است. تناقض حاصل حکم قضیه را ثابت می‌کند. □

قضیهٔ ۳۸. اگر G یک گراف ساده و $d_۱ \leq d_۲ \leq \cdots \leq d_n$ درجهٔ رأسهای G باشند به طوری که برای $i < \frac{n+۱}{۲}$، $d_i \geq i$ یا $d_{n+۱-i} \geq n - i$ است. در این صورت G یک مسیر هامیلتونی دارد.

اثبات. به G رأسی مانند w اضافه و آن را به همهٔ رأسهای G وصل می‌کنیم و گراف حاصل را G' می‌نامیم. در این صورت G' گرافی ساده با $n + ۱$ رأس و دنبالهٔ درجه‌ای $(d_۱ + ۱, d_۲ + ۱, \ldots, d_n + ۱, n)$ است. اگر $i < \frac{n+۱}{۲}$ باشد آنگاه $d_i \geq i$ یا $d_{n+۱-i} \geq n - i$ است. لذا برای $i < \frac{n+۱}{۲}$، $d_i + ۱ > i$ یا $d_{n+۱-i} + ۱ \geq n + ۱ - i$ است. در نتیجه بنا به قضیه قبل G' هامیلتونی است و لذا G مسیر هامیلتونی دارد. □

۳.٦ مسایل

۱) فرض کنید G گرافی با $۲k$ رأس فرد باشد. ثابت کنید یالهای G را می‌توان به k گذر افراز کرد.

۲) آیا گرافی اولری وجود دارد که تعداد رأسهای آن زوج و تعداد یالهای آن فرد باشد.

۳) فرض کنید G یک گراف همبند باشد که دور فرد نیست. ثابت کنید یالهای G را می‌توان با دو رنگ آبی و قرمز رنگ آمیزی کرد به طوری که برای هر رأس v با $۱ < \deg v$، یالی متصل به v با رنگ آبی و یالی متصل به v با رنگ قرمز موجود باشد.

۴) فرض کنید درجهٔ همهٔ رأسهای گراف G زوج باشد. ثابت کنید دورهای مجزای یالی $C_۱, C_۲, \ldots, C_m$ وجود دارند که یالهای G را افراز می‌کنند.

۵) به گراف اولری G، اولری اتفاقی از رأس v می‌گوییم اگر هر گذری در G که از v شروع شود، بتواند به یک تور اولری G گسترش یابد. ثابت کنید گراف اولری G، اولری اتفاقی از رأس v است اگر و تنها اگر تمام دورهای G، شامل رأس v باشند.

٦) اگر گراف اولری G، اولری اتفاقی از رأس v باشد، ثابت کنید $\deg v = \Delta$.

۷) اگر گراف اولری G، از r تا از رأسهایش اولری اتفاقی باشد، ثابت کنید r برابر ۰، ۱، ۲، یا $p(G)$ است.

۸) اگر گراف اولری G، اولری اتفاقی از رأس v باشد و $\deg v = \deg u$، ثابت کنید G اولری اتفاقی از رأس u نیز هست.

۹) فرض کنید $G = (A, B)$ گرافی دو بخشی باشد. اگر G هامیلتونی باشد، ثابت کنید $|A| = |B|$.

۱۰) ثابت کنید $K_{n,n}$، $\frac{(n-1)!n!}{2}$ دور هامیلتونی دارد.

۱۱) ثابت کنید kـمکعب، هامیلتونی است. $(k \geq 2)$

۱۲) موشی با خوردن مکعب‌های ۱ × ۱ × ۱، در یک قطعه پنیر با ابعاد ۳ × ۳ × ۳ راه خود را باز می‌کند و می خواهد با تونل زدن در این مکعب، تمام ۲۷ مکعب ۱ × ۱ × ۱ را بخورد. اگر موش کار خود را از یک گوشهٔ مکعب شروع کند و هیچ‌گاه به مکعبی که قبلاً خورده شده است نرود، آیا می‌تواند کارش را در مرکز مکعب تمام کند؟

۱۳) یک صفحهٔ شطرنجی $n \times 4$ در اختیار داریم. می خواهیم مهرهٔ اسب را در یک خانه قرار دهیم و با شروع از این خانه، همهٔ خانه‌های صفحهٔ شطرنجی را یک بار طی کنیم و نهایتاً به خانهٔ اول باز گردیم. آیا این کار امکان‌پذیر است؟

۱۴) n نقطه را روی یک دایره قرار دهید و هر نقطه را به دو نقطه مجاور خود در سمت چپ و دو نقطهٔ مجاور خود در سمت راست متصل کنید. $(n \geq 5)$ ثابت کنید گراف ۴ـمنتظم حاصل را می‌توان به صورت اجتماع دو دور هامیلتونی نوشت.

۱۵) فرض کنید G گرافی ساده با n رأس و $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ درجهٔ رأسهای G و $d'_1 \leq d'_2 \leq \cdots \leq d'_n$ درجهٔ رأسهای $\overline{G}$ باشد. اگر به‌ازای $i \leq \frac{n}{2}$، $d_i \geq d'_i$ باشد، ثابت کنید گراف G مسیر هامیلتونی دارد.

۱٦) هرگاه G گرافی ساده و خود مکمل باشد، ثابت کنید G مسیر هامیلتونی دارد.

۱۷) فرض کنید $G = (A, B)$ گرافی دو بخشی با $2n$ رأس و $|A| = |B| = n$ و $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_{2n}$ درجهٔ رأسهای G باشد. همچنین G' گرافی باشد که از وصل کردن تمام رأسهای B به یکدیگر در G حاصل می‌شود. ثابت کنید G هامیلتونی است اگر و تنها اگر G' هامیلتونی باشد.

۱۸) فرض کنید $e_1, e_2, \ldots, e_m$، m یال از K_n باشند که هیچ دو تایی رأس مشترک ندارند. $(0 \leq m \leq \frac{n}{2})$ ثابت کنید $(n-m-1)!2^{m-1}$ دور هامیلتونی از K_n شامل این m یال وجود دارد.

۱۹) فرض کنید $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ درجهٔ رأسهای گراف ساده G باشند به طوری که اگر $p \neq q$ و $d_p \leq p$ و $d_q \leq q$، آنگاه $d_p + d_q \geq n$. ثابت کنید G هامیلتونی است.

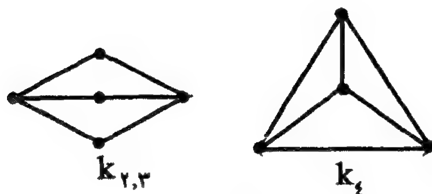
فصل ۷

گرافهای مسطح

۱.۷ گرافهای مسطح

تعریف ۲۹. گراف G را مسطح گوییم هرگاه بتوان نمودار G را در صفحه طوری کشید که هیچ دو یالی از G یکدیگر را قطع نکنند.

مثال ۲۶. گرافهای $K_۴$ و $K_{۲,۳}$ مسطح هستند.



شکل ۲۳

فرض کنید G یک گراف مسطح باشد و نمودار G در صفحه طوری رسم شده است که هیچ دو یالی متقاطع نیستند. تعداد نواحی تولید شده را در صفحه که توسط نمودار G پدید می‌آیند با f نمایش می‌دهیم. مثلاً برای $K_۴$، $f = ۴$ و برای $K_{۲,۳}$، $f = ۳$ است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که f به نحوهٔ رسم نمودار G بستگی ندارد.

قضیهٔ ۳۸ (فرمول اولر). هرگاه G گرافی همبند و مسطح باشد، آنگاه

$$p - q + f = ۲$$

اثبات. با استقراء روی q حکم را ثابت می‌کنیم. چون G همبند است، لذا $q \geq p - ۱$. به‌ازای $q = p - ۱$، G یک درخت است و لذا دور ندارد. در نتیجه $f = ۱$ و لذا $p - q + f = ۲$. فرض کنید حکم برای گرافهای همبند و مسطح با $q - ۱$ یال درست باشد و G گرافی همبند و مسطح با q یال باشد. $(q \geq p)$ چون $q \geq p$، لذا G دور دارد. e را یالی از G می‌گیریم که متعلق به دوری از G باشد. در نتیجه $G - e$ همبند و شامل $q - ۱$ یال است. همچنین $G - e$ مسطح است و اگر f تعداد نواحی گراف G باشد، تعداد نواحی $G - e$ برابر $f - ۱$ است و لذا طبق فرض استقراء

$$p - (q - ۱) + (f - ۱) = ۲ \Longrightarrow p - q + f = ۲. \square$$

نتیجهٔ ۱. اگر G گرافی مسطح با w مؤلفه همبندی باشد، آنگاه

$$p - q + f = w + ۱$$

اثبات. فرض کنید $G_۱, G_۲, \ldots, G_w$ مؤلفه‌های همبندی G باشند به‌گونه‌ای که G_i شامل p_i رأس و q_i یال و f_i ناحیه باشد. در این صورت

$$p = \sum_{i=۱}^{w} p_i, q = \sum_{i=۱}^{w} q_i, f = \sum_{i=۱}^{w} f_i - w + ۱, p_i - q_i + f_i = ۲$$

در نتیجه

$$p-q+f=\sum_{i=۱}^{w}(p_i-q_i+f_i)-w+۱=۲w-w+۱=w+۱.\square$$

نتیجهٔ ۲. اگر G گرافی مسطح باشد، آنگاه

$$p-q+f\geq ۲.$$

قضیهٔ ۳۹. اگر G گرافی ساده و مسطح و طول کوتاهترین دور در G برابر g باشد، آنگاه

$$q\leq \frac{(p-۲)g}{g-۲}.$$

اثبات. S را مجموعهٔ همهٔ زوجهای مرتب (F,e) می‌گیریم که F ناحیه‌ای شامل یال e است. بنا به فرض قضیه هر ناحیه شامل حداقل g یال است و لذا $|S|\geq fg$. همچنین هر یال حداکثر متعلق به ۲ ناحیه است و لذا $|S|\leq ۲q$. در نتیجه $fg\leq ۲q$. از طرفی بنا به نتیجهٔ ۲، $f\geq q-p+۲$ و لذا

$$(q-p+۲)g\leq ۲q \Longrightarrow q\leq \frac{(p-۲)g}{g-۲}.\square$$

نتیجه ۱. اگر G گرافی ساده و مسطح باشد، آنگاه $q\leq ۳p-۶$.

نتیجه ۲. اگر G گرافی ساده و مسطح و دو بخشی باشد، آنگاه $q\leq ۲p-۴$.

۲.۷ مسایل

۱) ثابت کنید گرافهای K_5، $K_{3,3}$، و پترسن مسطح نیستند.

۲) هرگاه G گرافی مسطح باشد،ثابت کنید $\delta(G) \leq 5$ است.

۳) هرگاه G گرافی مسطح باشد،ثابت کنید رأسهای G را می‌توان با ۶ رنگ، طوری رنگ‌آمیزی کرد که رنگهای هر دو رأس مجاور متفاوت باشند.

۴) هرگاه G گرافی مسطح با حداقل ۱۱ رأس باشد، ثابت کنید $\overline{G}$ مسطح نیست.

۵) ۷ نقطه روی یک دایره قرار دارند. حداکثر چند زوج از این نقاط را می‌توان با یک منحنی در صفحه به یکدیگر وصل کرد که هیچ دو منحنی یکدیگر را قطع نکنند و در ضمن محیط دایره را نیز قطع نکنند؟

۶) در یک n ضلعی محدب همهٔ قطرها رسم شده‌اند. درون n ضلعی حداکثر به چند ناحیه تقسیم می‌شود؟

۷) n نقطهٔ $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ در صفحه طوری قرار دارند که فاصلهٔ هر دوتایی از آنها حداقل ۱ است. ثابت کنید حداکثر $3n - 6$ زوج از این نقاط فاصله‌ای دقیقاً برابر ۱ دارند.

فصل ۸

گرافهای جهتدار

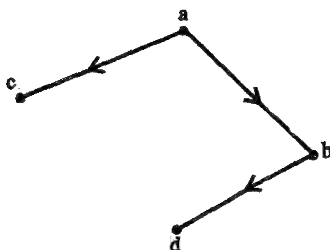
۱.۸ گرافهای جهتدار

تعریف ۳۰. منظور از یک گراف جهتدار D زوج مرتب (V, E) است که V مجموعه‌ای ناتهی و اعضای E زوجهای مرتب از اعضای V هستند.

مثال ۲۷. هرگاه $V = \{a, b, c, d\}$ و $E = \{(a, b), (a, c), (b, d)\}$، در این صورت $D = (V, E)$ گرافی جهتدار است.

همانند گرافهای ساده، به اعضای V، رأسهای D و به اعضای E، یالهای D می‌گوییم. همچنین به هر گراف جهتدار نموداری در صفحه نسبت می‌دهیم. به این صورت که به‌ازای هر رأس D نقطه‌ای در صفحه در نظر می‌گیریم و به‌ازای هر یال مانند (u, v) کمانی بین u و v رسم می‌کنیم و روی این کمان فلشی از u به v می‌گذاریم. به عنوان مثال شکل زیر نمودار

گراف مثال ۲۷ است.



شکل ۲٤

هرگاه (u,v) یالی از D باشد، می‌گوییم (u,v) از u خارج شده و به v وارد شده است. برای هر رأس u، تعداد یالهایی را که از u خارج شده‌اند درجهٔ خروجی u می‌نامیم و با $\deg^+ u$ نمایش می‌دهیم و تعداد یالهایی را که به u وارد شده‌اند درجهٔ ورودی u می‌نامیم و با $\deg^- u$ نمایش می‌دهیم. درجهٔ رأس u را برابر $\deg^+ u + \deg^- u$ تعریف می‌کنیم و با $\deg u$ نمایش می‌دهیم. همچنین تعریف می‌کنیم.

$$\delta^+ = \min \deg^+ u, \delta^- = \min \deg^- u,$$

$$\Delta^+ = \max \deg^+ u, \Delta^- = \max \deg^- u.$$

قضیهٔ ۴۰. برای هر گراف جهتدار D

$$q = \sum_{u \in V} \deg^+ u = \sum_{u \in V} \deg^- u$$

اثبات. فرض کنید

$$S = \{(e,u) | u \in V, e = (u,v) \in E\}$$

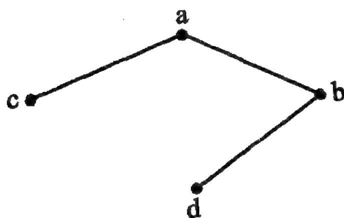
در این صورت $q = |S|$. از طرفی برای هر رأس u، $\deg^+ u$ یال e به صورت (u, v) وجود دارد و لذا $\sum_{u \in V} \deg^+ u = |S|$. در نتیجه $q = \sum_{u \in V} \deg^+ u$. به طور مشابه رابطهٔ $q = \sum_{u \in V} \deg^- u$ ثابت می‌شود. □

منظور از یک گشت جهتدار در D دنباله‌ای از رأسهای D مانند

$$v_۰, v_۱, \ldots, v_n$$

است به‌گونه‌ای که $(v_{i-۱}, v_i) \in E$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$. همچنین طول این گشت را برابر n تعریف می‌کنیم. همانند گرافهای ساده گذر جهتدار، مسیر جهتدار، و دور جهتدار تعریف می‌شود.

منظور از گراف زمینهٔ D گرافی بدون جهت مانند G است که از حذف جهت یالهای D به‌دست آمده است. به عنوان مثال شکل زیر، گراف زمینهٔ گراف مثال ۲۷ است.



شکل ۲۵

تعریف ۳۱. منظور از یک تورنمنت، گراف کاملی است که یالهای آن جهت‌گذاری شده‌اند.

به مسیر جهتداری که شامل همهٔ رأسهای D باشد، مسیر هامیلتونی جهتدار می‌گوییم.

قضیه ۴۱. هر تورنمنت یک مسیر هامیلتونی جهتدار دارد.

اثبات. فرض کنید T یک تورنمنت و

$$P : x_1, x_2, \ldots, x_k$$

بلندترین مسیر جهتدار در T باشد. اگر رأس v از T موجود باشد که در P نیست، در این صورت طبق تعریف P، جهت یالهای vx_1 و vx_k باید به صورت (x_1, v) و (v, x_k) باشند. در نتیجه اندیس i وجود دارد که جهت یالهای vx_i و vx_{i+1} به صورت (x_i, v) و (v, x_{i+1}) هستند. حال

$$x_1, \ldots, x_i, v, x_{i+1}, \ldots, x_k$$

مسیری جهتدار با طول بزرگتر از طول P است که با تعریف P در تناقض است. در نتیجه P یک مسیر هامیلتونی جهتدار از T است. □

قضیهٔ ۴۲. هر تورنمنت شامل رأسی مانند u است که برای هر رأس v، یا $(u, v) \in E$ و یا رأس w موجود است که $(u, w), (w, v) \in E$.

اثبات. فرض کنید u رأسی باشد که $\deg^+ u$ بزرگترین عدد در میان اعداد $\deg^+ x$، $x \in V$، باشد. اگر برای رأس v، $(u, v) \notin E$، در این صورت $(v, u) \in E$. لذا چون $\deg^+ u \geq \deg^+ v$، در نتیجه رأس w موجود است که $(u, w) \in E$ و $(v, w) \notin E$ و لذا $(u, w), (w, v) \in E$. □

گراف جهتدار D را اولری گوییم هرگاه یک گذر بستهٔ جهتدار شامل همهٔ یالهای D داشته باشد و D را نیمه اولری گوییم هرگاه یک گذر جهتدار شامل همهٔ یالهای D داشته باشد. D را همبند گوییم هرگاه گراف زمینهٔ آن همبند باشد. همانند گرافهای بدون جهت، دو قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۴۳. گراف جهتدار و همبند D اولری است اگر و تنها اگر برای هر رأس u، $\deg^+ u = \deg^- u$.

قضیهٔ ۴۴. گراف جهتدار و همبند D نیمه اولری است اگر و تنها اگر $|\deg^+ u - \deg^- u|$ برای حداکثر دو رأس برابر ۱ و برای مابقی رأسها برابر صفر باشد.

اثبات این دو قضیه کاملاً مشابه با اثبات قضیه‌های ۳۲ و ۳۳ است.

۲.۸ مسایل

۱) فرض کنید D یک گراف جهتدار بدون دور جهتدار باشد. ثابت کنید $\delta^- = \circ$ و نتیجه بگیرید ترتیبی از رأسهای D مانند $v_۱, v_۲, \ldots, v_p$ وجود دارد که برای $i < j$، $(v_i, v_j) \notin E$.

۲) فرض کنید D یک گراف جهتدار باشد. ثابت کنید مسیری در D به طول $\max\{\delta^+, \delta^-\}$ وجود دارد.

۳) فرض کنید D یک گراف جهتدار و $\ell = \max\{\delta^+, \delta^-\} > \circ$ باشد. ثابت کنید D دوری جهتدار به طول حداقل $\ell + ۱$ دارد.

۴) فرض کنید G یک گراف بدون جهت باشد. ثابت کنید یالهای G را می‌توان طوری جهت‌گذاری کرد که برای هر رأس v، $|\deg^+ v - \deg^- v| \leq ۱$ باشد.

۵) فرض کنید D یک گراف جهتدار باشد. ثابت کنید مجموعهٔ مستقل S از رأسهای D وجود دارد که برای هر رأس $v \in V - S$،

رأس $u \in S$ یافت شود که از u به v یک مسیر جهتدار به طول حداکثر ۲ موجود باشد.

٦) فرض کنید D یک گراف جهتدار با n رأس و $۴n$ یال باشد. ثابت کنید دوری در D وجود دارد که جهت یالهای آن یک در میان مستقیم و معکوس است.

فصل ۹

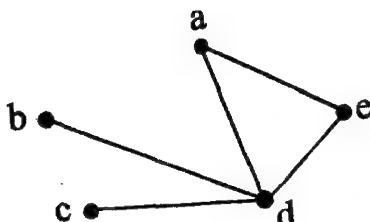
مجموعه‌های مستقل و خوشه‌ها

۱.۹ مجموعه‌های مستقل و خوشه‌ها

تعریف ۲۳. چنانچه $G = (V, E)$ یک گراف و $S \subset V$ باشد، S را مستقل گوییم هرگاه هیچ دو رأسی از S در G مجاور نباشند. مجموعهٔ مستقل S را ماکزیمم گوییم هرگاه مجموعهٔ مستقل S' در G یافت نشود که $|S'| > |S|$. تعداد اعضای یک مجموعهٔ مستقل ماکزیمم در G را با $\alpha(G)$ و یا به طور ساده‌تر با α نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۳. زیر مجموعهٔ K از V را یک پوشش برای G می‌نامیم هرگاه هر یال از G حداقل به یکی از رأسهای K متصل باشد. پوشش K را مینیمم گوییم هرگاه پوشش K' یافت نشود که $|K| > |K'|$. تعداد اعضای یک پوشش مینیمم G را با $\beta(G)$ و یا به طور ساده‌تر با β نمایش می‌دهیم.

مثال ۲۸. در گراف شکل زیر $S = \{a, b, c\}$ یک مجموعهٔ مستقل و $K = \{d, e\}$ یک پوشش است.



شکل ۲٦

قضیه ۴۵. زیر مجموعهٔ S از V یک مجموعهٔ مستقل در گراف G است اگر و تنها اگر $V - S$ یک پوشش برای G باشد.

اثبات. از تعریف واضح است. □

قضیهٔ ۴٦. در هر گراف p رأسی، $\alpha + \beta = p$.

اثبات. فرض کنید S مجموعه‌ای مستقل با $|S| = \alpha$ و K پوششی با $|K| = \beta$ باشد. بنا به قضیهٔ قبل $V - K$ مجموعه‌ای مستقل با $p - \beta$ رأس و $V - S$ پوششی با $p - \alpha$ رأس است. در نتیجه طبق تعریف α و β

$$\alpha \geq p - \beta, \beta \leq p - \alpha$$

و لذا $\alpha + \beta = p$. □

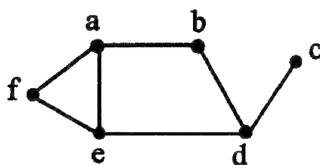
تعریف ۳۴. زیرمجموعهٔ M از E را یک تطابق گوییم هرگاه هیچ دو یالی از M رأس مشترک نداشته باشند. می‌گوییم تطابق M رأس v را آغشته می‌کند هرگاه v حداقل به یکی از یالهای M متصل باشد. تطابق M را ماکزیمم گوییم هرگاه تطابق M' با $|M'| > |M|$ یافت نشود. تعداد اعضای

تطابق ماکزیمم را در گراف G با $\alpha'(G)$ و یا به طور ساده‌تر با α' نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳۵. زیرمجموعهٔ L از E را یک پوشش یالی برای G گوییم هرگاه هر رأس G حداقل به یکی از یالهای L متصل باشد. پوشش یالی L را مینیمم گوییم هرگاه پوشش یالی L' با $|L'| < |L|$ یافت نشود. تعداد اعضای پوشش یالی مینیمم را با $\beta'(G)$ و یا به طور ساده‌تر با β' نمایش می‌دهیم.

توجه کنید که پوشش یالی هنگامی وجود دارد که گراف، رأس تنها نداشته باشد.

مثال ۲۹. در گراف شکل زیر $M = \{ab, cd, ef\}$ یک تطابق و $L = \{af, cd, bd, de\}$ یک پوشش یالی است.



شکل ۲۷

قضیهٔ ۴۷. اگر $\delta > ۰$، آنگاه $\alpha' + \beta' = p$.

اثبات. فرض کنید M یک تطابق ماکزیمم در G و U مجموعهٔ رأسهایی از G باشد که توسط M آغشته نشده‌اند. در این صورت $|U| = p - ۲\alpha'$. چون $\delta > ۰$ و M ماکزیمم است، در نتیجه به هر رأس U حداقل یک یال متصل است و همچنین هیچ دو رأسی از U مجاور نیستند. حال برای هر رأس U یالی متصل به آن در نظر می‌گیریم و مجموعهٔ این یالها را E'

می‌نامیم. در این صورت $M \cup E'$ یک پوشش یالی برای G است که

$$|M \cup E'| = |M| + |E'| = \alpha' + |U| = \alpha' + p - ۲\alpha' = p - \alpha'$$

و لذا طبق تعریف β'، $\beta' \leq p - \alpha'$ و در نتیجه $\alpha' + \beta' \leq p$. حال اگر L یک پوشش یالی مینیمم باشد، قرار می‌دهیم $H = G[L]$ و M را یک تطابق ماکزیمم در H در نظر می‌گیریم. U را مجموعهٔ رأسهایی از H می‌گیریم که توسط M آغشته نشده‌اند. چون M ماکزیمم است لذا هیچ دو رأسی از U در H مجاور نیستند و چون L یک پوشش یالی است در نتیجه متناظر با هر رأس U یالی در L موجود است و در نتیجه

$$|L| - |M| = |L - M| \geq |U| = p - ۲|M| \Longrightarrow \beta' = |L| \geq p - |M|$$

حال چون M یک تطابق در G است، در نتیجه $|M| \leq \alpha'$ و لذا $\beta' \geq p - \alpha'$ و در نتیجه $\alpha' + \beta' \geq p$ که با نتیجهٔ بند قبل، نتیجه می‌شود $\alpha' + \beta' = p$. □

تعریف ۳۶. G را یک گراف rـبخشی گوییم هرگاه بتوان رأسهای G را به r زیر مجموعهٔ مستقل افراز کرد. منظور از گراف rـبخشی کامل $K_{n_۱,n_۲,\ldots,n_r}$ گراف rـبخشی است که تعداد رأسهای بخشهای آن $n_۱, n_۲, \ldots, n_r$ است و هر دو رأس در دو بخش متفاوت به یکدیگر متصلند. منظور از $T_{n,r}$ گراف rـبخشی کاملی است که هر بخش آن شامل $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ رأس یا $\lceil \frac{n}{r} \rceil$ رأس است.

تعریف ۳۷. منظور از یک خوشهٔ rـتایی در گراف G، عبارتست از r رأس که دو به دو به یکدیگر متصلند.

قضیهٔ ۴۸. اگر $G = (V, E)$ گرافی ساده باشد که خوشه $r + ۱$ـتایی ندارد، در این صورت گراف rـبخشی و سادهٔ H با مجموعهٔ رأسهای V وجود دارد که برای هر $v \in V$، $\deg_G v \leq \deg_H v$

اثبات. با استقراء روی r حکم را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $r = ۱$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $r - ۱$ درست باشد و G گرافی ساده بدون خوشه $r + ۱$ـتایی باشد. u را یک رأس با درجهٔ Δ در G می‌گیریم و تعریف می‌کنیم $G' = G[N(u)]$ که $N(u)$ مجموعهٔ همسایه‌های u است. چون G خوشهٔ $r + ۱$ـتایی ندارد و u به همهٔ رأسهای G' وصل است لذا G' خوشهٔ rـتایی ندارد. بنا به فرض استقراء گراف $r - ۱$ـبخشی و سادهٔ H' با مجموعهٔ رأسهای $N(u)$ وجود دارد که برای هر $v \in N(u)$، $\deg_{G'} v \leq \deg_{H'} v$. حال فرض کنید $V_۱ = N(u)$ و $V_۲ = V - V_۱$ و H گرافی با مجموعهٔ رأسهای V باشد که $H' = H[V_۱]$ و $H[V_۲]$ شامل هیچ یالی نباشد و همهٔ رأسهای $V_۱$ به همهٔ رأسهای $V_۲$ در H متصل باشند. در این صورت H گرافی rـبخشی و ساده است و برای هر $v \in V_۲$

$$\deg_H v = \Delta \geq \deg_G v$$

و برای هر $v \in V_۱$

$$\deg_H v = \deg_{H'} v + |V_۲| \geq \deg_{G'} v + |V_۲| \geq \deg_G v$$

در نتیجه برای هر $v \in V$، $\deg_G v \leq \deg_H v$. □

نتیجه. اگر G گرافی ساده و n رأسی باشد که خوشهٔ $r + ۱$ـتایی ندارد، در این صورت گراف ساده و rـبخشی H با n رأس وجود دارد که $q(H) \geq q(G)$.

قضیهٔ ۴۹. در میان گرافهای سادهٔ rـبخشی با n رأس، $T_{n,r}$ دارای بیشترین تعداد یال است.

اثبات. فرض کنید در میان گرافهای سادهٔ rـبخشی با n رأس، G دارای بیشترین تعداد یال باشد. در این صورت G یک گراف rـبخشی کامل است. اگر G با $T_{n,r}$ یکریخت نباشد، در این صورت G شامل دو مؤلفهٔ A و B است که $|A| - |B| \geq ۲$. حال اگر v رأسی از A باشد، قرار می‌دهیم $A' = A - \{v\}$ و $B' = B \cup \{v\}$ و H را گراف rـبخشی کاملی می‌گیریم که از قرار دادن A' و B' به جای A و B در G به‌دست می‌آید. در این صورت

$$q(H) = q(G) + |A| - ۱ - |B| > q(G)$$

و این با تعریف G در تناقض است. در نتیجه G با $T_{n,r}$ یکریخت است. □

نتیجه. در میان گرافهای سادهٔ n رأسی که خوشهٔ $r + ۱$ـتایی ندارند، $T_{n,r}$ دارای بیشترین تعداد یال است.

۲.۹ مسایل

۱) فرض کنید G یک گراف همبند و برای هر یال e، $\alpha(G-e) > \alpha(G)$ باشد. ثابت کنید G رأس برشی ندارد.

۲) فرض کنید G یک گراف همبند و برای هر یال e، $\beta(G-e) < \beta(G)$ باشد. ثابت کنید G رأس برشی ندارد.

۳) فرض کنید $n = n_۱ + n_۲ + \cdots + n_r$، ثابت کنید تعداد یالهای $K_{n_۱, n_۲, \ldots, n_r}$ برابر $\frac{۱}{۲}(n^۲ - \sum_{i=۱}^{r} n_i^۲)$ است.

۴) فرض کنید G یک گراف ساده باشد. ثابت کنید زیر گراف r بخشی H از G وجود دارد که برای هر رأس v، $\deg_H v \geq (۱ - \frac{۱}{r}) \deg_G v$.

۵) فرض کنید $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor = a$، ثابت کنید

$$q(T_{n,r}) = \binom{n-a}{۲} + (r-۱)\binom{a+۱}{۲}.$$

٦) فرض کنید G یک گراف ساده n رأسی بدون خوشهٔ $r+۱$ـتایی باشد. ثابت کنید

$$q(G) \leq (۱ - \frac{۱}{r})\frac{n^۲}{۲}$$

۷) فرض کنید S مجموعه‌ای از n نقطه در صفحه باشد که فاصلهٔ هر دو نقطه حداکثر ۱ است. ثابت کنید حداکثر $[\frac{n^۲}{۳}]$ زوج از این نقاط، فاصله‌ای بیش از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ دارند.

فصل ۱۰

حل مسایل

۱.۱۰ حل مسایل فصل دوم

۱) چون اعضای $E(G)$ زیرمجموعه‌های دو عضوی $V(G)$ هستند پس تعداد یالهای G حداکثر برابر تعداد زیر مجموعه‌های دو عضوی $V(G)$ است. پس

$$q \leq \binom{p}{۲}$$

۲) فرض کنید $(d_۱, d_۲, \ldots, d_p)$ دنبالهٔ درجه‌ای گراف مورد نظر باشد. در این صورت

$$\delta \leq d_i \leq \Delta, \quad i = ۱, ۲, \ldots, p$$

$$\Longrightarrow p\delta \leq \sum_{i=۱}^{p} d_i \leq p\Delta \Longrightarrow p\delta \leq ۲q \leq p\Delta \Longrightarrow \delta \leq \frac{۲q}{p} \leq \Delta.$$

۳) فرض کنید $(d_۱, \ldots, d_p)$ دنبالهٔ درجه‌ای گراف G باشد به گونه‌ای که $d_۱ \leq d_۲ \leq \cdots \leq d_p$. چون G گرافی ساده با p رأس است پس برای هر $۱ \leq i \leq p$، $۰ \leq d_i \leq p-۱$. حال اگر G دو رأس با درجهٔ برابر نداشته باشد آنگاه

$$۰ \leq d_۱ < d_۲ < \cdots < d_p \leq p-۱$$

و در نتیجه $d_۱ = ۰$ و $d_p = p-۱$. اما این حالت نمی‌تواند اتفاق بیافتد زیرا رأس درجهٔ $p-۱$ به همهٔ رأسها متصل است و لذا درجهٔ هر رأسی حداقل ۱ است که با $d_۱ = ۰$ در تناقض است. در نتیجه رأسهای u و v از G یافت می‌شوند که $\deg u = \deg v$. اکنون برای $p \geq ۳$ گراف سادهٔ G_p را طوری می‌سازیم که در آن سه رأس با درجهٔ برابر پیدا نشود. فرض کنید $r = \lfloor \frac{p}{۲} \rfloor$ و $s = \lceil \frac{p}{۲} \rceil$، در این صورت $p = r+s$. فرض کنید

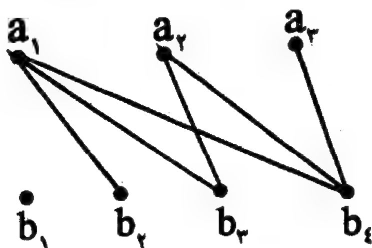
$$V(G_p) = \{a_۱, \ldots, a_r, b_۱, \ldots, b_s\},$$

$$E(G_p) = \{a_i b_j | ۱ \leq i < j \leq s\}$$

دراین صورت G_p گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌ای

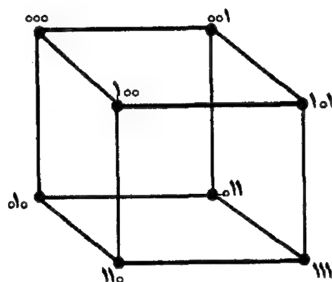
$$(s-۱, s-۲, \ldots, s-r, ۰, ۱, \ldots, s-۱)$$

است. (زیرا $\deg a_i = s - i$ و $\deg b_j = j - ۱$، $i = ۱, ۲, \ldots, r$ و $j = ۱, ۲, \ldots, s$.) در نتیجه در G سه رأس با درجهٔ برابر پیدا نمی‌شود. به عنوان مثال نمودار $G_۷$ در شکل رسم شده‌است.



شکل ۲۸

۴) الف)



شکل ۲۹

ب) تعداد رأسهای گراف kـمکعب برابر تعداد دنباله‌های k رقمی از ۰ و ۱ یعنی ۲^k است. برای هر دنبالهٔ kـرقمی از ۰ و ۱ دقیقاً k دنبالهٔ k رقمی از ۰ و ۱ می‌توان یافت که با دنبالهٔ مذکور دقیقاً در یک مولفه اختلاف داشته باشند. پس درجهٔ هر رأس در kـمکعب برابر k است و لذا بنا به قضیهٔ ۲ تعداد یالهای kـمکعب برابر $k۲^{k-۱}$ است.

۵) فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $V = \{v_۱, \ldots, v_n\}$ باشد به گونه‌ای که دو رأس v_i و v_j مجاورند هرگاه فاصلهٔ A_i و A_j برابر ۱

باشد. برای هر نقطهٔ A_i حداکثر ٦ نقطه از مجموعهٔ $\{A_۱, \ldots, A_n\}$ می‌توان یافت که فاصلهٔ آنها از A_i برابر ۱ است. زیرا روی محیط دایرهٔ به مرکز A_i و شعاع ۱ حداکثر ٦ نقطه می‌توان یافت که فاصلهٔ دو به دوی آنها حداقل برابر ۱ باشد. در نتیجه $\deg v_i \leq ٦$ و لذا

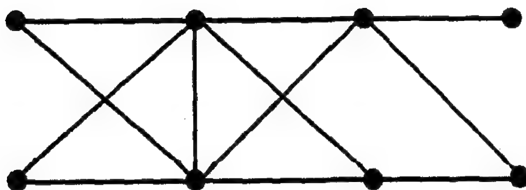
$$۲q = \sum_{i=۱}^{n} \deg v_i \leq ٦n \Longrightarrow q \leq ۳n$$

در نتیجه حداکثر $۳n$ زوج از نقاط مجموعهٔ $\{A_۱, \ldots, A_n\}$ فاصله‌ای دقیقاً برابر ۱ دارند.

٦) i) این دنباله گرافیک نیست زیرا در گراف سادهٔ ۷ رأسی درجهٔ هر رأس حداکثر ٦ است.

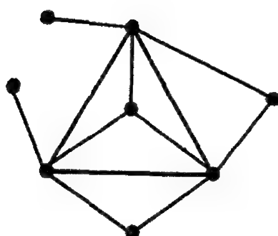
ii) این دنباله گرافیک نیست زیرا مجموع جملات آن عددی فرد است.

iii)

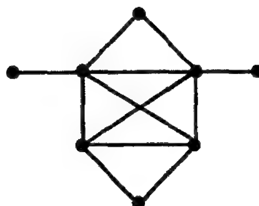


شکل ۳۰

iv و v)



شکل ۳۱



شکل ۳۲

vi) این دنباله گرافیک نیست زیرا اگر دنبالهٔ درجه‌ای گراف G برابر $(۱, ۱, ۱, ۲, ۴, ۵, ۵, ۵)$ باشد با حذف ۳ رأس درجهٔ ۱ از G گرافی ساده با ۵ رأس و حداقل ۹ یال به‌دست می‌آید. می‌دانیم $K_۵$، ۱۰ یال دارد پس درجهٔ هر رأس در گراف ۵ رأسی با حداقل ۹ یال حداقل ۳ می‌باشد و لذا G باید ۵ رأس از درجه ۳ یا بیشتر داشته باشد که این گونه نیست.

۷) قرار دهید

$$V(G) = \{a_۱, \ldots, a_k, b_۱, \ldots, b_k\},$$

$$E(G) = \{a_ib_j | ۱ \leq i \leq j \leq k\}$$

در این صورت $\deg a_i = k - i + ۱$ و $\deg b_j = j$، $i = ۱, ۲, \ldots, k$ و $j = ۱, ۲, \ldots, k$. پس دنبالهٔ درجه‌ای G، $(۱, ۱, ۲, ۲, \ldots, k, k)$ است و در نتیجه این دنباله گرافیک است.

۸) فرض کنید $V(G)=\{v_۱,v_۲,\ldots,v_p\}$ به گونه‌ای که $\deg v_i=d_i$. برای $i=۱,۲,\ldots,k$ فرض کنید d_i^+ تعداد یالهایی باشد که یک سر آنها v_i و سر دیگر آنها در مجموعهٔ $\{v_{k+۱},\ldots,v_p\}$ باشد. در این صورت $d_i-d_i^+\le k-۱$ و لذا

$$\sum_{i=۱}^{k} d_i=\sum_{i=۱}^{k}(d_i-d_i^+)+\sum_{i=۱}^{k} d_i^+\le k(k-۱)+\sum_{i=۱}^{k} d_i^+$$

اما $\sum_{i=۱}^{k} d_i^+$ برابر تعداد یالهایی است که یک سر آنها در $\{v_۱,\ldots,v_k\}$ و سر دیگر آنها در $\{v_{k+۱},\ldots,v_p\}$ است. برای $j=k+۱,\ldots,p$ فرض کنید d_j^+ تعداد یالهایی باشد که یک سر آنها v_j و سر دیگر آنها در $\{v_۱,\ldots,v_k\}$ است. در این صورت $\sum_{i=۱}^{k} d_i^+=\sum_{j=k+۱}^{p} d_j^+$ و همچنین $d_j^+\le\min\{d_j,k\}$. در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{k} d_i\le k(k-۱)+\sum_{i=۱}^{k} d_i^+=k(k-۱)+\sum_{j=k+۱}^{p} d_j^+$$

$$\le k(k-۱)+\sum_{j=k+۱}^{p}\min\{d_j,k\}$$

۹) با استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای $n=۱$، گراف کامل p رأسی در شرایط مورد نظر صدق می‌کند. $(p=a_۱+۱)$ برای $n=۲$، فرض کنید $p=a_۲+۱$ و

$$V(G)=\{v_۱,\ldots,v_p\},$$

$$E(G) = \{v_iv_j | 1 \leq i \leq a_1, 1 \leq j \leq p, i \neq j\}$$

در این صورت G گرافی است که درجهٔ a_1 رأس آن a_2 و درجهٔ $p - a_1$ رأس آن a_1 است و لذا G در شرایط مورد نظر مسأله صدق می‌کند. حال فرض کنید $n \geq 3$ و حکم برای اعداد کوچکتر از n درست باشد و دنبالهٔ $0 < a_1 < \cdots < a_n$ داده شده باشد. طبق فرض استقراء گرافی ساده با $a_{n-1} - a_1 + 1$ رأس وجود دارد که مجموعهٔ درجهٔ رأسهای این گراف برابر $\{a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_{n-1} - a_1\}$ است. به این گراف $a_n - a_{n-1} + a_1$ رأس اضافه کنید و a_1 رأس از این رأسها را به همهٔ رأسها وصل کنید. در این صورت گرافی با $a_n + 1$ رأس به‌دست می‌آید که مجموعهٔ درجهٔ رأسهای آن برابر $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ است و در نتیجه حکم برای n نیز درست است.

۱۰) فرض کنید $(d_2 - 1, \ldots, d_{\Delta+1} - 1, d_{\Delta+2}, \ldots, d_p)$ دنبالهٔ درجه‌ای گراف سادهٔ H با مجموعهٔ رأسهای $V(H) = \{v_2, v_3, \ldots, v_p\}$ باشد. حال G را گرافی می‌گیریم که از اضافه کردن رأس v_1 به H و وصل کردن آن به رأسهای $v_2, \ldots, v_{\Delta+1}$ از H به‌دست می‌آید. در این صورت G گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌ای $(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ است. برعکس، فرض کنید $(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ دنبالهٔ درجه‌ای گراف سادهٔ G با مجموعهٔ رأسهای $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ باشد. اگر v_1 به رأسهای $v_2, v_3, \ldots, v_{\Delta+1}$ متصل باشد با حذف v_1 از G و یالهای متصل به آن گرافی ساده با دنبالهٔ درجه‌ای $(d_2 - 1, \ldots, d_{\Delta+1} - 1, d_{\Delta+2}, \ldots, d_p)$ به‌دست می‌آید. اگر

اندیس $2 \leq i \leq \Delta + 1$ موجود باشد که v_1 و v_i مجاور نباشند، در این صورت با توجه به این که $\deg v_1 = d_1 = \Delta$، لذا اندیس $j \geq \Delta + 2$ موجود است که v_1 و v_j مجاور هستند. حال چون $i < j$، لذا $\deg v_i = d_i \geq d_j = \deg v_j$ و چون v_1 به v_j متصل است ولی به v_i متصل نیست پس اندیس k موجود است که v_i به v_k متصل است ولی v_j به v_k متصل نیست. (چرا؟) فرض کنید G_1 گرافی باشد با مجموعهٔ رأسهای $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ و مجموعهٔ یالهای

$$E(G_1) = (E(G) \cup \{v_1 v_i, v_j v_k\}) - \{v_1 v_j, v_i v_k\}$$

در این صورت دنبالهٔ درجه‌ای گراف سادهٔ G_1 نیز $(d_1, d_2, \ldots, d_p)$ است. با ادامهٔ این فرآیند به گراف ساده‌ای مانند G_ℓ می رسیم که

$$V(G_\ell) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}, \deg_{G_\ell} v_i = d_i$$

و v_1 به رأسهای $v_2, v_3, \ldots, v_{\Delta+1}$ متصل است و با توجه به بحث انجام شده نتیجه می‌گیریم دنبالهٔ

$$(d_2 - 1, \ldots, d_{\Delta+1} - 1, d_{\Delta+2}, \ldots, d_p)$$

گرافیک است.

۱۱) فرض کنید u و v دو رأس دلخواه از G باشند و A و B به ترتیب مجموعهٔ همسایه‌های u و v باشند. در این صورت $A \cap B$ مجموعهٔ همسایه‌های مشترک u و v است و $|A| = \deg u$ و $|B| = \deg v$. فرض کنید

$$X = \{(a, b) | a \in A, b \in B, ab \in E(G)\}$$

حال دو حالت زیر را در نظر می گیریم.

حالت اول. u و v مجاور نیستند.

در این حالت $s = |A \cap B|$. اگر $a \in A - B$، در این صورت a و v مجاور نیستند و لذا s همسایهٔ مشترک دارند. پس a دقیقاً به s رأس از B متصل است. اگر $a \in A \cap B$، در این صورت a و v مجاورند و لذا r همسایه مشترک دارند. پس a دقیقاً به r رأس از B متصل است. در نتیجه

$$|X| = s|A - B| + r|A \cap B| = s(\deg u - s) + rs$$

چنانچه همین استدلال را برای B به جای A تکرار کنیم، نتیجه می‌گیریم

$$|X| = s|B - A| + r|B \cap A| = s(\deg v - s) + rs$$

از دو تساوی اخیر و اینکه $s \geq ۲$ نتیجه می‌شود $\deg u = \deg v$.

حالت دوم. u و v مجاورند.

در این حالت $|A \cap B| = r$ و همچنین $v \in A - B$ و $u \in B - A$. اگر $a \in A \cap B$، در این صورت a و v مجاورند و لذا r همسایهٔ مشترک دارند. پس a دقیقاً به r رأس از B متصل است. اگر $a \in A - B$ و $a \neq v$، در این صورت a و v مجاور نیستند و لذا s همسایهٔ مشترک دارند. پس a دقیقاً به s رأس از B متصل است. همچنین رأس v به

همهٔ رأسهای B متصل است. در نتیجه

$$|X| = r|A \cap B| + s(|A - B| - ۱) + |B|$$

$$= r^۲ + s(\deg u - s - ۱) + \deg v$$

چنانچه همین استدلال را برای B به جای A تکرار کنیم، نتیجه می‌گیریم

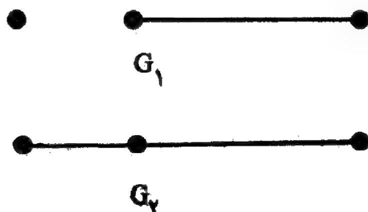
$$|X| = r^۲ + s(\deg v - s - ۱) + \deg u$$

از دو تساوی اخیر نتیجه می‌شود

$$s \deg u + \deg v = s \deg v + \deg u \Longrightarrow (s - ۱) \deg u = (s - ۱) \deg v$$

چون $s \geq ۲$، نتیجه می شود $\deg u = \deg v$.

پس در هر صورت $\deg u = \deg v$ و لذا G گرافی منتظم است. به ازای $s = ۰, ۱$ دو گراف شکل زیر در فرض مسأله صدق می‌کنند ولی منتظم نیستند.



شکل ۳۳

۱۲) با توجه به مسأله ۱۱، G گرافی kـمنتظم است و در نتیجه، G، $\operatorname{srg}(p, k, ۰, ۲)$ است. لذا طبق قضیهٔ ۳

$$۲(p - k - ۱) = k(k - ۱)$$

$$\Longrightarrow p=\frac{k(k-۱)}{۲}+k+۱=\frac{k(k+۱)}{۲}+۱=\binom{k+۱}{۲}+۱.$$

۱۳) طبق فرض مسأله، G $\mathrm{srg}(۱۲k,۳k+٦,t,t)$ است. در نتیجه طبق قضیهٔ ۳

$$t(۱۲k-۳k-٦-۱)=(۳k+٦)(۳k+٦-t-۱)$$

$$\Longrightarrow t(۹k-۷)=۹k^۲+۳۳k+۳۰-t(۳k+٦)$$

$$\Longrightarrow t(۱۲k-۱)=۳(۳k^۲+۱۱k+۱۰)$$

لذا t مضربی از ۳ است و در نتیجه $\frac{۳k^۲+۱۱k+۱۰}{۱۲k-۱}$ عددی صحیح است. لذا $\frac{۳k^۲+۱۱k+۱۰}{۱۲k-۱}\times ۴$ نیز عددی صحیح است. اما داریم

$$۴\times\frac{۳k^۲+۱۱k+۱۰}{۱۲k-۱}=\frac{۱۲k^۲+۴۴k+۴۰}{۱۲k-۱}=k+۴-\frac{۳k-۴۴}{۱۲k-۱}$$

لذا $\frac{۳k-۴۴}{۱۲k-۱}$ عددی صحیح است. اما به ازای $k\geq ۱۵$، $۱>\frac{۳k-۴۴}{۱۲k-۱}>۰$ و به ازای $۴\leq k\leq ۱۴$، $۰>\frac{۳k-۴۴}{۱۲k-۱}>-۱$ و به ازای $k=۱,۲$، $\frac{۳k-۴۴}{۱۲k-۱}$ عددی صحیح نیست و لذا تنها جواب مسأله $k=۳$ است. (به ازای $k=۳$ خود می‌توانید گرافی صادق در شرایط مسأله پیدا کنید.)

۲.۱۰ حل مسایل فصل سوم

۱) فرض کنید u و v دو رأس فرد در G باشند. در میان گذرهایی که از u شروع می‌شوند P را آن گذری در نظر می‌گیریم که دارای بیشترین تعداد یال است. مثلاً

$$P : u, x_{۱}, \ldots, x_k$$

چون P گذر است در نتیجه یال تکراری ندارد و لذا برای هر رأس w به غیر از u و x_k از $\deg w$ یال متصل به w تعداد زوجی یال در P آمده‌اند. (چرا؟) اگر $u = x_k$ باشد آنگاه تعداد زوجی یال از $\deg u$ یال متصل به u در P ظاهر شده است و چون $\deg u$ عددی فرد است پس یال $ux_{k+۱} = x_k x_{k+۱}$ موجود است که در P ظاهر نشده است و لذا P را می‌توان به گذر

$$u, x_{۱}, \ldots, x_k, x_{k+۱}$$

که تعداد یال بیشتری از P دارد گسترش داد که با تعریف P در تناقض است. پس $u \neq x_k$ و در نتیجه از $\deg x_k$ یال متصل به x_k تعداد فردی در P ظاهر شده است. اگر x_k یک رأس زوج باشد در این صورت یالی متصل به x_k موجود است که در P ظاهر نشده و

لذا همانند استدلال قبل می‌توان P را به یک گذر با تعداد یال بیشتر گسترش داد که با تعریف P در تناقض است. در نتیجه x_k یک رأس فرد است و چون فقط u و v رأسهای فرد G هستند و $u \neq x_k$ پس $x_k = v$ و لذا P یک گذر بین u و v است. لذا بنا به قضیهٔ ۴ مسیری بین u و v در G موجود است.

۲) فرض کنید

$$P : x_{\circ}, x_{\backslash}, \ldots, x_k$$

مسیری با بزرگترین طول در G باشد. اگر $k < \delta$ باشد، آنگاه چون $\deg x_k \geq \delta$ لذا رأس x_{k+1} موجود است که به x_k متصل است و $x_{k+1} \notin \{x_{\circ}, \ldots, x_{k-1}\}$. حال

$$x_{\circ}, x_{1}, \ldots, x_k, x_{k+1}$$

مسیری با طول بزرگتر از طول P است که با تعریف P در تناقض است. در نتیجه $k \geq \delta$ و لذا

$$x_{\circ}, x_{1}, \ldots, x_{\delta}$$

مسیری به طول δ در گراف G است.

۳) فرض کنید

$$P : x_{\circ}, x_{1}, \ldots, x_k$$

مسیری با بزرگترین طول در G باشد. بنا به مسألهٔ ۲، $k \geq \delta$ است. چون $\deg x_{\circ} \geq \delta \geq ۲$، لذا رأس u موجود است که u به $x_{\circ}$ متصل

است و $u \notin \{x_1, \ldots, x_{\delta-1}\}$. اگر u در P ظاهر نشده باشد

$$u, x_0, x_1, \ldots, x_k$$

مسیری با طول بزرگتر از طول P است که با تعریف P در تناقض است. در نتیجه اندیس $j \geq \delta$ موجود است که $u = x_j$. حال

$$x_j, x_0, x_1, \ldots, x_j$$

دوری به طول $j + 1$ در G است و چون $j \geq \delta$ پس طول این دور حداقل $\delta + 1$ است.

۴) اگر G گراف کامل باشد که حکم واضح است. در غیر این صورت دو رأس غیر مجاور u و v در G موجود است. چون درجهٔ هر رأس G حداقل n است، پس از $2n - 2$ رأس غیر از u و v حداقل دو رأس w و t موجودند که هر دو با u و v مجاورند. حال $uwvtu$ دوری به طول ۴ در گراف G است.

۵) فرض کنید $r = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ و $s = p - r$. گراف $G = (V, E)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$V = \{a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s\},$$

$$E = \{a_i b_j | i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, s\}$$

در این صورت G گرافی ساده با p رأس و $\lfloor \frac{p^2}{4} \rfloor = rs$ یال است که مثلث ندارد.

۶) فرض کنید u و v دو رأس مجاور در G باشند، در این صورت u و v حداقل

$$f(u,v) = \deg u - ۱ + \deg v - ۱ - (p - ۲) = \deg u + \deg v - p$$

همسایه مشترک دارند و لذا حداقل $f(u,v)$ مثلث شامل u و v در G وجود دارد. حال اگر t تعداد مثلثهای گراف باشد، دراین صورت

$$۳t = \sum_{uv\in E} f(u,v) = \sum_{uv\in E} (\deg u + \deg v - p)$$

$$= \sum_{u\in V} (\deg u)^۲ - pq \geq \frac{۱}{p}(\sum_{u\in V} \deg u)^۲ - pq$$

$$= \frac{۴q^۲}{p} - pq = \frac{۴q}{p}(q - \frac{p^۲}{۴}) \Longrightarrow t \geq \frac{۴q}{۳p}(q - \frac{p^۲}{۴}).$$

۷) فرض کنید هر دو رأس u و v از G حداکثر $m - ۱$ همسایه مشترک داشته باشند، در این صورت تعداد مسیرسای به طول ۲ بین u و v حداکثر $m - ۱$ است و لذا تعداد مسیرهای به طول ۲ در گراف حداکثر $(m - ۱)\binom{p}{۲}$ است و لذا بنا به قضیهٔ ۵

$$\sum_{i=۱}^{p} \binom{d_i}{۲} \leq (m - ۱)\binom{p}{۲}$$

که این با فرض مسأله در تناقض است.

۸) فرض کنید هر دو رأس u و v از G حداکثر $m - ۱$ همسایهٔ مشترک داشته باشند، در این صورت بنا به استدلال مسأله ۷، تعداد مسیرهای

به طول ۲ در گراف حداکثر $(m-۱)\binom{p}{۲}$ است و لذا بنا به قضیهٔ ۷

$$q(\frac{۲q}{p}-۱) \leq (m-۱)\binom{p}{۲} \Longrightarrow q^۲ - \frac{pq}{۲} \leq \frac{۱}{۴}(m-۱)p^۲(p-۱)$$

$$\Longrightarrow (q-\frac{p}{۴})^۲ \leq \frac{۱}{۴}(m-۱)p^۲(p-۱) + \frac{p^۲}{۱۶}$$

$$= \frac{۱}{۴}(m-۱)p^۳ - \frac{p^۲}{۱۶}(۴m-۵) < \frac{۱}{۴}(m-۱)p^۳$$

$$\Longrightarrow q < \frac{۱}{۲}\sqrt{m-۱}p^{\frac{۳}{۲}} + \frac{p}{۴}$$

که با فرض مسأله در تناقض است.

۹) گراف G را طوری در نظر می‌گیریم که مجموعهٔ رأسهای آن n نقطهٔ مورد نظر باشد و دو رأس را به یکدیگر متصل می‌کنیم هر گاه فاصلهٔ آنها دقیقاً برابر ۱ باشد. می‌دانیم برای هر دو نقطه A و B حداکثر دو نقطه در صفحه می‌توان یافت که فاصلهٔ آنها از هر دو A و B برابر ۱ باشد. در نتیجه هر دو رأس از گراف G حداکثر دو همسایهٔ مشترک دارند و لذا بنا به مسأله ۸ به ازای $m = ۳$ داریم

$$q < \frac{۱}{۲}\sqrt{۲}n^{\frac{۳}{۲}} + \frac{n}{۴} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}n^{\frac{۳}{۲}} + \frac{n}{۴}$$

که q تعداد یالهای G است. پس حداکثر $\frac{۱}{\sqrt{۲}}n^{\frac{۳}{۲}} + \frac{n}{۴}$ زوج از n نقطهٔ مورد نظر فاصله‌ای دقیقاً برابر ۱ دارند.

۱۰) فرض کنید A و B دو بردار به طول واحد در صفحه باشند و x زاویه بین دو بردار باشد. ($۰ \leq x \leq ۱۸۰$) در این صورت

$$|A+B|^۲ = |A|^۲ + |B|^۲ + ۲|A||B|\cos x = ۲ + ۲\cos x$$

بنابراین $|A+B| < ۱$ اگر و تنها اگر

$$۲ + ۲\cos x < ۱ \Longleftrightarrow \cos x < -\frac{۱}{۲} \Longleftrightarrow ۱۲۰ < x \leq ۱۸۰$$

در نتیجه اگر A، B، و C سه بردار به طول واحد در صفحه باشند هر سه رابطهٔ

$$|A+B| < ۱, |A+C| <, |B+C| < ۱$$

با هم نمی‌توانند برقرار باشند. حال گراف G را با مجموعهٔ رأسهای $\{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ در نظر می‌گیریم و دو رأس x_i و x_j را به یکدیگر متصل می‌کنیم هر گاه $|x_i + x_j| < ۱$. بنا به مطلب اخیر گراف G مثلث ندارد. لذا بنا به قضیهٔ توران

$$q \leq \lfloor \frac{n^۲}{۴} \rfloor$$

در نتیجه حداکثر $\lfloor \frac{n^۲}{۴} \rfloor$ زوج از بردارها را می‌توان یافت که طول مجموع هر زوج کوچکتر از ۱ باشد.

۱۱) گراف G را طوری در نظر می‌گیریم که رأسهای G، n نقطه مورد نظر باشند و دو رأس را به یکدیگر متصل می‌کنیم هر گاه طول پاره خط واصل بین این دو رأس برابر x باشد. از هندسه مسطحه می‌دانیم که برای هر دو نقطه A و B حداکثر دو نقطه در صفحه می‌توان یافت

که فاصله آنها از A و B برابر x باشد. در نتیجه در گراف G بین هر دو رأس u و v حداکثر دو مسیر به طول ۲ وجود دارد و لذا تعداد مسیرهای به طول ۲ در گراف G حداکثر برابر $\binom{n}{۲}$۲ است. لذا بنا به قضیهٔ ۷

$$q(\frac{۲q}{n}-۱) \leq ۲\binom{n}{۲} \Longrightarrow q^۲ - \frac{nq}{۲} \leq \frac{n^۲(n-۱)}{۲}$$

$$\Longrightarrow (q-\frac{n}{۴})^۲ \leq \frac{n^۳-n^۲}{۲} + \frac{n^۲}{۱۶} = \frac{۸n^۳ - ۷n^۲}{۱۶}$$

$$\Longrightarrow q \leq \frac{n}{۴} + \frac{n}{۴}\sqrt{۸n-۷} = \frac{n}{۴}(۱+\sqrt{۸n-۷})$$

در نتیجه حداکثر $\frac{n}{۴}(۱+\sqrt{۸n-۷})$ پاره خط به طول x در میان پاره خطهای واصل بین نقطه n وجود دارد. حال فرض کنید در میان پاره خطهای واصل بین n نقطه، طولهای $x_۱, x_۲, \ldots, x_k$ موجود باشد. بنا به قسمت قبل برای هر i حداکثر $\frac{n}{۴}(۱+\sqrt{۸n-۷})$ پاره خط به طول x_i وجود دارد و در نتیجه

$$k \times \frac{n}{۴}(۱+\sqrt{۸n-۷}) \geq \binom{n}{۲} \Longrightarrow k \geq \frac{۲(n-۱)}{۱+\sqrt{۸n-۷}}$$

$$= \frac{۲(n-۱)(-۱+\sqrt{۸n-۷})}{۸n-۸} = \frac{۱}{۴}(-۱+\sqrt{۸n-۷})$$

حال توجه کنید که تابع $f(y) = \sqrt{y+۱} - \sqrt{y}$ که برای $y > ۰$ تعریف شده نزولی است و در نتیجه برای هر عدد طبیعی n،

$$\sqrt{۸n-۶} - \sqrt{۸n-۷} = f(۸n-۷) \leq f(۱) = \sqrt{۲} - ۱$$

$$\Longrightarrow \sqrt{۸n-۷}-۱ \geq \sqrt{۸n-٦}-\sqrt{۲} = ۲\sqrt{۲}(\sqrt{n-\frac{۳}{۴}}-\frac{۱}{۲})$$

$$\Longrightarrow k \geq \frac{۱}{۴}(\sqrt{۸n-۷}-۱) \geq \frac{۱}{\sqrt{۲}}(\sqrt{n-\frac{۳}{۴}}-\frac{۱}{۲}).$$

۱۲) فرض کنید تعداد افراد گروه n نفر باشد. گراف G را به صورت زیر در نظر می گیریم.

$$V(G) = \{a_۱, \ldots, a_n\} \cup \{b_۱, \ldots, b_{۴۰}\} = A \cup B$$

و دو رأس a_i و b_j را به یکدیگر متصل می‌کنیم هرگاه نفر i ام در جلسهٔ j ام شرکت کرده باشد. در این صورت $\deg b_j = ۱۰$، $j = ۱, ۲, \ldots, ۴۰$، زیرا در هر جلسه ۱۰ نفر شرکت کرده‌اند. فرض کنید $\deg a_i = d_i$، $i = ۱, ۲, \ldots, n$. طبق فرض مسأله هر دو رأس b_j و b_k، $j \neq k$ حداکثر یک همسایهٔ مشترک دارند و لذا حداکثر یک مسیر به طول ۲ بین b_j و b_k وجود دارد و در نتیجه حداکثر $\binom{۴۰}{۲}$ مسیر به طول ۲ وجود دارد که دو سر این مسیرها در B واقع است. از طرفی تعداد مسیرهای به طول ۲ که دو سر آنها در B واقع است برابر تعداد مسیرهای به طول ۲ است که رأس میانی آنها در A قرار دارد و این تعداد برابر $\sum_{i=۱}^{n}\binom{d_i}{۲}$ است. در نتیجه

$$\sum_{i=۱}^{n}\binom{d_i}{۲} \leq \binom{۴۰}{۲} \Longrightarrow \frac{d_۱^۲+\cdots+d_n^۲}{۲}-\frac{d_۱+\cdots+d_n}{۲} \leq ۷۸۰$$

از طرفی اگر

$$X = \{(a,b)|a \in A, b \in B, ab \in E(G)\}$$

آنگاه

$$d_۱ + \cdots + d_n = |X| = ۱۰ \times ۴۰ = ۴۰۰$$

همچنین بنا به نابرابری حسابی-مربعی

$$\frac{d_۱^۲ + \cdots + d_n^۲}{۲} \geq \frac{۱}{۲n}(d_۱ + \cdots + d_n)^۲ = \frac{۸۰۰۰۰}{n}$$

در نتیجه

$$\frac{۸۰۰۰۰}{n} - ۲۰۰ \leq ۷۸۰$$

$$\Longrightarrow \frac{۸۰۰۰۰}{n} \leq ۹۸۰ \Longrightarrow n \geq \frac{۸۰۰۰۰}{۹۸۰} \Longrightarrow n \geq ۸۲.$$

۱۳) برای هر دو رأس u و v از G حداکثر یک مسیر به طول ۲ بین u و v وجود دارد و در نتیجه G حداکثر $\binom{p}{۲}$ مسیر به طول ۲ دارد و در نتیجه بنا به قضیهٔ ۷

$$q(\frac{۲q}{p} - ۱) \leq \binom{p}{۲} \Longrightarrow q^۲ - \frac{pq}{۲} \leq \frac{p^۲(p-۱)}{۴} \Longrightarrow$$

$$(q - \frac{p}{۴})^۲ \leq \frac{p^۳ - p^۲}{۴} + \frac{p^۲}{۱۶} = \frac{۴p^۳ - ۳p^۲}{۴} \Longrightarrow q \leq \frac{p}{۴}(۱ + \sqrt{۴p - ۳}).$$

۱۴) گراف G را به صورت زیر در نظر می‌گیریم

$$V(G) = \{x_۱, \ldots, x_a\} \cup \{y_۱, \ldots, y_b\} = X \cup Y$$

اگر داور شماره j به شرکت کننده شماره i نمرهٔ قبول دهد دو رأس x_i و y_j را با یال آبی به یکدیگر متصل می‌کنیم و در غیر این صورت با یال قرمز این دو رأس را به یکدیگر متصل می‌کنیم. چنانچه دو یال از یک مسیر به طول ۲ همرنگ باشند به این مسیر یک مسیر رنگی می‌گوییم. بنابراین طبق فرض مسأله بین هر دو رأس از Y حداکثر k مسیر رنگی وجود دارد و در نتیجه G حداکثر $k\binom{b}{۲}$ مسیر رنگی دارد که دو سر آنها در Y است. تعداد یالهای آبی و قرمز متصل به رأس x_i را به ترتیب با r_i و s_i نمایش می دهیم، $i = ۱, ۲, \ldots, a$. در نتیجه

$$r_i+s_i = b \Longrightarrow r_i^۲+s_i^۲ \geq \frac{۱}{۲}(r_i+s_i)^۲ \geq \frac{b^۲}{۲} \Longrightarrow ۲(r_i^۲+s_i^۲) \geq b^۲$$

و تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $r_i = s_i$. اما چون b فرد است و $r_i + s_i = b$ و r_i و s_i هر دو عدد صحیح هستند پس $r_i \neq s_i$ و در نتیجه

$$۲(r_i^۲ + s_i^۲) > b^۲ \Longrightarrow ۲(r_i^۲ + s_i^۲) \geq b^۲ + ۱$$

حال تعداد مسیرهای رنگی که دو سر آنها در Y است برابر تعداد مسیرهای رنگی است که رأس میانی آنها در X است و این تعداد برابر $\sum_{i=۱}^{a}(\binom{r_i}{۲} + \binom{s_i}{۲})$ است. در نتیجه

$$k\binom{b}{۲} \geq \sum_{i=۱}^{a}(\binom{r_i}{۲} + \binom{s_i}{۲}) = \sum_{i=۱}^{a}(\frac{r_i^۲ + s_i^۲}{۲} - \frac{r_i + s_i}{۲})$$

$$= \sum_{i=1}^{a} \frac{r_i^2 + s_i^2}{2} - \sum_{i=1}^{a} \frac{r_i + s_i}{2} \geq \frac{a(b^2+1)}{4} - \frac{ab}{2}$$

$$\Longrightarrow \frac{kb(b-1)}{2} \geq \frac{a}{4}(b^2 - 2b + 1) = \frac{a}{4}(b-1)^2 \Longrightarrow \frac{k}{a} \leq \frac{b-1}{2b}$$

۱۵) بنا به نتیجهٔ قضیهٔ ۹، G حتماً دور دارد. مثلاً

$$P : x_0, x_1, \ldots, x_n, x_0$$

یک دور در G است. چون G، ۲ـمنتظم است در نتیجه به هیچ یک از x_i ها یال دیگری غیر از یالهای موجود در P متصل نیست. حال اگر G رأسی مانند y داشته باشد که در P ظاهر نشده است، در این صورت چون G همبند است بین x_0 و y مسیری در G موجود است. مثلاً

$$Q : y = u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k = x_0$$

چون y در P ظاهر نشده و x_0 در P ظاهر شده است پس اندیس j موجود است که u_j در P ظاهر شده است ولی u_{j-1} در P ظاهر نشده است و لذا $\deg u_j \geq 3$ که با $\deg u_j = 2$ در تناقض است. در نتیجه G به جز رأسها و یالهای P رأس و یال دیگری ندارد. لذا G همان دور C_p است که $p = n + 1$.

۱۶) فرض کنید G همبند باشد و V_1 و V_2 افرازی از $V(G)$ به دو زیر مجموعهٔ ناتهی باشد و $v_1 \in V_1$ و $v_2 \in V_2$. چون G همبند است

مسیری بین $v_۱$ و $v_۲$ در G موجود است. مثلاً

$$P : v_۱ = x_۰, x_۱, \ldots, x_{n-۱}, x_n = v_۲$$

چون $v_۱ \in V_۱$ و $v_۲ \in V_۲$ و $V(G) = V_۱ \cup V_۲$ لذا اندیس j موجود است که $x_{j-۱} \in V_۱$ و $x_j \in V_۲$. (در حقیقت j را می‌توان کوچکترین عددی در نظر گرفت که $x_j \in V_۲$) در نتیجه یک سر یال $x_{j-۱}x_j$ در $V_۱$ و سر دیگر آن در $V_۲$ است. بر عکس اگر G ناهمبند باشد، حداقل دو مؤلفهٔ همبندی دارد. فرض کنید $V_۱$ یک مؤلفه همبندی G و $V_۲ = V(G) - V_۱$ باشد. در این صورت $V_۱$ و $V_۲$ افرازی از $V(G)$ به دو زیر مجموعهٔ ناتهی است و طبق تعریف $V_۱$، هیچ یالی از G وجود ندارد که یک سر آن در $V_۱$ و سر دیگر آن در $V_۲$ باشد.

۱۷) واضح است که برای هر دو دنبالهٔ k تایی از ۰ و ۱ مانند A و B می‌توان دنبالهٔ

$$A = C_۱, C_۲, \ldots, C_n = B$$

از دنباله‌های k تایی از ۰ و ۱ یافت به گونه‌ای که C_i و $C_{i+۱}$ دقیقاً در یک مؤلفه اختلاف دارند و لذا بین A و B در kـمکعب مسیری وجود دارد و در نتیجه این گراف، همبند است.

۱۸) فرض کنید

$$P : x_۰, x_۱, \ldots, x_k, \quad Q : y_۰, y_۱, \ldots, y_\ell, \quad k \geq \ell$$

و P و Q رأس مشترک نداشته باشند. چون G همبند است در G مسیری بین $x_۰$ و $y_۰$ موجود است. مثلاً

$$R : x_۰ = u_۰, u_۱, \ldots, u_{t-۱}, u_t = y_۰$$

فرض کنید i بزرگترین اندیسی باشد که u_i در P ظاهر شده است و $i > j$ کوچکترین اندیسی باشد که u_j در Q ظاهر شده است. همچنین فرض کنید $u_i = x_r$ و $u_j = y_s$، در این صورت در مسیر

$$x_r = u_i, u_{i+1}, \ldots, u_j = y_s$$

به غیر از u_i و u_j هیچ یک از رأسها در P یا Q ظاهر نشده‌اند. (طبق تعریف i و j) در نتیجه هر یک از دو دنبالهٔ زیر مسیری در G هستند.

$$S_1 : x_0, x_1, \ldots, x_r, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, y_s, y_{s-1}, \ldots, y_1, y_0;$$

$$S_2 : x_k, x_{k-1}, \ldots, x_r, u_{i+1}, \ldots, u_{j-1}, y_s, y_{s+1}, \ldots, y_\ell;$$

اگر طول مسیر S_i را با $L(S_i)$ نمایش دهیم، در این صورت

$$L(S_1) > r + s, L(S_2) > k - r + \ell - s$$

حال با توجه به اینکه $k \geq \ell$، طول یکی از مسیرهای فوق از ℓ (طول Q) بیشتر است که این با فرض مسأله در تناقض است.

۱۹) فرض کنید u و v دو رأس دلخواه از G باشند که به یکدیگر متصل نیستند. چون $\deg u \geq \frac{p-1}{2}$ و $\deg v \geq \frac{p-1}{2}$ در نتیجه $\deg u + \deg v \geq p - 1$ و لذا از $p - 2$ رأس غیر از u و v رأسی مانند w موجود است که به هر دو u و v متصل است و لذا بین u و v مسیری در G موجود است و در نتیجه G همبند است.

۲۰) اگر G ناهمبند باشد، بنا به مسأله ۱۶، $V(G)$ را می توان به دو زیر مجموعهٔ ناتهی V_1 و V_2 افراز کرد به گونه‌ای که هیچ یالی بین

V_1 و V_2 موجود نباشد. فرض کنید $p_1 = |V_1|$ و $p_2 = |V_2|$، در این صورت $p_1 + p_2 = p$ و داریم

$$q \le \binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2}$$

همچنین چون V_1 و V_2 ناتهی‌اند، پس $p_i \ge 1$، $i = 1, 2$. در نتیجه $p_i \le p - 1$، $i = 1, 2$. پس

$$p_1 + 1 \le p \Longrightarrow p_1^2 - 1 \le p(p_1 - 1) \Longrightarrow 2p_1^2 - 2 \le 2pp_1 - 2p$$

$$\Longrightarrow (p - p_1)^2 + p_1^2 \le p^2 - 2p + 2 \Longrightarrow p_1^2 + p_2^2 \le p^2 - 2p + 2$$

$$\Longrightarrow \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} - \frac{p_1 + p_2}{2} \le \frac{p^2 - 3p + 2}{2}$$

$$\Longrightarrow q \le \binom{p_1}{2} + \binom{p_2}{2} \le \binom{p-1}{2}$$

که با فرض مسأله در تناقض است.

۲۱) فرض کنید v رأسی از G باشد. چون G همبند است مسیری بین v و x در G موجود است. فرض کنید P مسیری بین v و x در G باشد، مثلاً

$$P : v = u_0, u_1, \ldots, u_k = x$$

اگر P شامل یال e نباشد که حکم ثابت است و الا در غیر این صورت $u_{k-1} = y$ و

$$Q : v = u_0, u_1, \ldots, u_{k-1} = y$$

مسیری بین v و y است که شامل یال e نیست.

۲۲) اگر G ناهمبند باشد، بنا به مسأله ۱۶، $V(G)$ را می‌توان به دو زیر مجموعهٔ ناتهی V_1 و V_2 افراز کرد که هیچ یالی بین V_1 و V_2 نباشد. فرض کنید $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ مجموعهٔ رأسهای G باشد به گونه‌ای که $\deg v_i = d_i$، $i = 1, 2, \ldots, p$. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $v_p \in V_1$. چون هیچ یالی بین V_1 و V_2 وجود ندارد پس تمام d_p همسایهٔ v_p در V_1 قرار دارند و در نتیجه $|V_1| \geq d_p + 1$ و در نتیجه $k = |V_2| \leq p - d_p - 1$. فرض کنید $v \in V_2$، چون بین V_1 و V_2 هیچ یالی وجود ندارد پس تمام همسایه‌های v در V_2 قرار دارند و لذا $\deg v \leq k - 1$ و در نتیجه G حداقل k رأس با درجهٔ حداکثر $k - 1$ دارد. ولی $k \leq p - d_p - 1$ و لذا طبق فرض مسأله $k \leq d_k \leq d_{k+1} \leq \cdots \leq d_p$ و در نتیجه G حداکثر $k - 1$ رأس از درجهٔ حداکثر $k - 1$ دارد. تناقض حاصل حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۲۳) فرض کنید H گرافی باشد که از حذف k یال از G به‌دست آمده باشد. اگر H ناهمبند باشد، بنا به مسأله ۱۶، $V(H) = V(G)$ را می‌توان به دو زیر مجموعهٔ ناتهی V_1 و V_2 افراز کرد که بین V_1 و V_2 هیچ یالی در H موجود نباشد. در نتیجه بین V_1 و V_2 حداکثر k یال در G موجود است. فرض کنید $|V_1| = p_1$ و $|V_2| = p_2$ و مثلاً $p_1 \leq p_2$ باشد، پس برای هر رأس $v \in V_1$، v حداکثر به $p_1 - 1$ رأس از V_1 در G متصل است و لذا v حداقل به $\delta - p_1 + 1$ رأس از V_2 در G متصل است. در نتیجه بین V_1 و V_2 حداقل $p_1(\delta - p_1 + 1)$

یال در G موجود است. پس

$$k \geq p_۱(\delta - p_۱ + ۱)$$

اما $۱ \leq p_۱ \leq p_۲$ و $p_۱ + p_۲ = p$ و در نتیجه

$$p_۱ \leq \frac{p}{۲} \Longrightarrow p_۱ \leq \lfloor \frac{p}{۲} \rfloor = \lceil \frac{p-۱}{۲} \rceil \leq \delta$$

$$\Longrightarrow p_۱(p_۱ - ۱) \leq \delta(p_۱ - ۱) \Longrightarrow p_۱(\delta - p_۱ + ۱) \geq \delta \Longrightarrow k \geq \delta.$$

۲۴) فرض کنید G دور به طول ۳ و ۴ نداشته باشد و x رأسی از G و $\{y_۱, y_۲, \ldots, y_k\}$ مجموعهٔ همسایه‌های x در G باشد. $(k = \deg x)$
چون G دور به طول ۳ ندارد، پس هیچ کدام از y_i ها به یکدیگر متصل نیستند. همچنین چون G دور به طول ۴ ندارد، پس برای هر دو اندیس i و j، x تنها همسایهٔ مشترک y_i و y_j است. در نتیجه اگر $\{z_{i,۱}, z_{i,۲}, \ldots, z_{i,t_i}\}$ مجموعهٔ همسایه‌های y_i در G به غیر از x باشد $(t_i + ۱ = \deg y_i)$، $i = ۱, ۲, \ldots, k$، در این صورت در دنبالهٔ زیر همهٔ رأسها دو به دو متمایزند.

$$x, y_۱, y_۲, \ldots, y_k, z_{۱,۱}, \ldots, z_{۱,t_۱}, \ldots, z_{k,۱}, \ldots, z_{k,t_k}$$

در نتیجه

$$p \geq ۱ + k + t_۱ + \cdots + t_k = ۱ + k + (\deg y_۱ - ۱) + \cdots + (\deg y_k - ۱)$$

$$= ۱ + \deg y_۱ + \cdots + \deg y_k$$

در نتیجه برای هر رأس x از G

$$p-1 \geq \sum_{xy\in E} \deg y \Longrightarrow p(p-1) \geq \sum_{x\in V}\sum_{xy\in E} \deg y$$

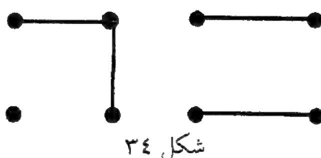
$$= \sum_{y\in V} (\deg y)^2 \geq \frac{1}{p}(\sum_{y\in V} \deg y)^2 = \frac{4q^2}{p}$$

$$\Longrightarrow q \leq \frac{1}{2} p\sqrt{p-1}$$

که این با فرض مسأله در تناقض است.

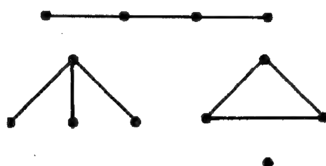
۳.۱۰ حل مسایل فصل چهارم

۱) واضح است که به ازای $t = ۰, ۱, ۵, ۶$ تنها یک گراف ۴ رأسی با t یال وجود دارد. همچنین ۲ گراف ۴ رأسی با ۲ یال وجود دارد. (همانند شکل)



شکل ۳٤

چنانچه G یک گراف ۴ رأسی با ۴ یال باشد، $\overline{G}$ گرافی ۴ رأسی با ۲ یال است و لذا تنها دو گراف ۴ رأسی با ۴ یال وجود دارد. همچنین ۳ گراف ۴ رأسی با ۳ یال وجود دارد. (همانند شکل)



شکل ۳۵

در نتیجه در مجموع ۱۱ گراف ۴ رأسی دو به دو غیر یکریخت وجود دارد.

۲) چون G کامل نیست در نتیجه دو رأس غیر مجاور مانند x و y دارد. فرض کنید

$$P : x = z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, z_k = y$$

کوتاهترین مسیر بین x و y در G باشد. (توجه کنید که G همبند است و لذا P وجود دارد.) چون x و y مجاور نیستند لذا $k \geq 2$. z_0 و z_2 مجاور نیستند زیرا در غیر این صورت

$$Q : x = z_0, z_2, z_3, \dots, z_{k-1}, z_k = y$$

مسیری بین x و y با طول کوچکتر از طول P است که با تعریف P در تناقض است. در نتیجه z_0 و z_2 مجاور نیستند. فرض کنید $u = z_0$، $v = z_1$، و $w = z_2$ در این صورت

$$uv, vw \in E(G), uw \notin E(G)$$

۳) چون G رأس تنها ندارد، در نتیجه هر مؤلفهٔ همبندی G حداقل یک یال دارد. اگر G ناهمبند باشد، a_1، a_2، b_1، و b_2 را چهار رأس در G می‌گیریم به گونه‌ای که a_1 و a_2 دو رأس مجاور در یک مؤلفهٔ همبندی و b_1 و b_2 دو رأس مجاور در مؤلفهٔ همبندی دیگر باشند. در این صورت زیر گراف القایی روی این ۴ رأس شامل ۲ یال است که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه G همبند است. اگر G گراف کامل نباشد طبق مسألهٔ ۲، G شامل ۳ رأس u، v، و w است که $uv, vw \in E(G)$ و $uw \notin E(G)$. لذا زیر گراف القایی روی ۳ رأس

u، v، و w شامل ۲ یال است که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه G گراف کامل است.

۴) فرض کنید G گرافی با p رأس و $x_{\circ}$ یک رأس با درجهٔ Δ در G باشد. اگر $\Delta < p - ۱$، در این صورت رأس u غیر مجاور با $x_{\circ}$ در G موجود است. فرض کنید

$$P : x_{\circ}, x_{۱}, \dots, x_{k-۱}, x_k = u$$

کوتاهترین مسیر بین $x_{\circ}$ و u در G باشد. چون u و $x_{\circ}$ غیر مجاورند در نتیجه $k \geq ۲$ و چون P کوتاهترین مسیر بین $x_{\circ}$ و u است در نتیجه $x_{\circ}$ و $x_{۲}$ غیر مجاورند. چون $\deg x_{\circ} = \Delta$ و $x_{۱}$ و $x_{۲}$ مجاور و $x_{\circ}$ و $x_{۲}$ غیر مجاورند در نتیجه رأس v موجود است که v و $x_{\circ}$ مجاور و v و $x_{۱}$ غیر مجاورند. اکنون زیر گراف القایی روی ۴ رأس v، $x_{\circ}$، $x_{۱}$، و $x_{۲}$ یا مسیر چهار رأسی است و یا دور ۴ رأسی، که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه $\Delta = p - ۱$.

۵) فرض کنید A مجموعه $\lfloor \frac{p}{۲} \rfloor + ۱$ رأسی باشد که زیر گراف القایی روی این رأسها کامل است و B مجموعهٔ بقیهٔ رأسهای G باشد و

$$S = \{(a,b) | a \in A, b \in B, ab \in E(G)\}$$

هر رأس $a \in A$ دقیقاً به $k - \lfloor \frac{p}{۲} \rfloor$ رأس از B متصل است. در نتیجه

$$|S| = (\lfloor \frac{p}{۲} \rfloor + ۱)(k - \lfloor \frac{p}{۲} \rfloor)$$

از طرفی هر رأس $b \in B$ حداقل به $k - (p - \lfloor \frac{p}{۲} \rfloor - ۲)$ رأس از A متصل است. در نتیجه

$$|S| \geq (p - \lfloor \frac{p}{۲} \rfloor - ۱)(k - p + \lfloor \frac{p}{۲} \rfloor + ۲) \Longrightarrow$$

$$(\lfloor\frac{p}{۲}\rfloor + ۱)(k - \lfloor\frac{p}{۲}\rfloor) \geq (p - \lfloor\frac{p}{۲}\rfloor - ۱)(k - p + \lfloor\frac{p}{۲}\rfloor + ۲) \Longrightarrow$$

$$k(۲\lfloor\frac{p}{۲}\rfloor + ۲ - p) \geq \lfloor\frac{p}{۲}\rfloor(\lfloor\frac{p}{۲}\rfloor + ۱) + (p - \lfloor\frac{p}{۲}\rfloor - ۱)(-p + \lfloor\frac{p}{۲}\rfloor + ۲)$$

$$= \lfloor\frac{p}{۲}\rfloor^۲ + \lfloor\frac{p}{۲}\rfloor - p^۲ + ۲p\lfloor\frac{p}{۲}\rfloor + ۳p - \lfloor\frac{p}{۲}\rfloor^۲ - ۳\lfloor\frac{p}{۲}\rfloor - ۲$$

$$= (p - ۱)(۲\lfloor\frac{p}{۲}\rfloor + ۲ - p) \Longrightarrow k \geq p - ۱$$

از طرفی G، pـرأسی و kـمنتظم است در نتیجه $k \leq p - ۱$ و لذا $k = p - ۱$. یعنی G گراف کامل است.

۶) الف) فرض کنید X مجموعهٔ زیر گراف‌های القایی H روی k رأس باشد، در این صورت $|X| = \binom{\ell}{k}$ و هر $K \in X$ دقیقاً m یال دارد. فرض کنید

$$S = \{(e, K) | K \in X, e \in E(K)\}$$

در این صورت $|S| = m\binom{\ell}{k}$. از طرفی هر یال e از H دقیقاً در $\binom{\ell-۲}{k-۲}$ زیر گراف $K \in X$ قرار دارد و در نتیجه $|S| = q(H)\binom{\ell-۲}{k-۲}$. پس

$$q(H) = \frac{m\binom{\ell}{k}}{\binom{\ell-۲}{k-۲}}.$$

ب) فرض کنید $\ell > k$ و H یک زیر گراف القایی ℓ رأسی از G باشد و $x_۱$ و $x_۲$ دو رأس از H و $K_۱ = H - x_۱$ و $K_۲ = H - x_۲$ باشند.

در این صورت $K_۱$ و $K_۲$ دو زیر گراف القایی $\ell - ۱$ رأسی هستند و چون $k \geq \ell - ۱$، پس طبق الف تعداد یالهای $K_۱$ و $K_۲$ برابرند. از طرفی داریم

$$q(H) = q(K_i) + \deg_H x_i, \quad i = ۱, ۲$$

و لذا از $q(K_۱) = q(K_۲)$ نتیجه می‌شود $\deg_H x_۱ = \deg_H x_۲$. در نتیجه H گرافی منتظم است. حال طبق فرض $k < p - ۱$ و لذا تمام زیر گرافهای القایی $p - ۱$ رأسی G منتظم هستند و چون طبق الف تعداد یالهای هر زیر گراف القایی $p - ۱$ رأسی ثابت است پس عدد ثابت t وجود دارد که هر زیر گراف القایی $p - ۱$ رأسی از G، tـمنتظم است. همچنین با توجه به بحث اخیر به ازای $\ell = p$ نتیجه می‌گیریم که خود G نیز گرافی منتظم است. فرض کنید G گرافی rـمنتظم باشد. اگر $۰ < r < p - ۱$ و x رأسی از G باشد، در این صورت رأسهای y و z از G موجودند که $xy \in E(G)$ و $xz \notin E(G)$. اگر $G_۱ = G - y$ و $G_۲ = G - z$، در این صورت $G_۱$ و $G_۲$ زیر گرافهای القایی $p - ۱$ رأسی از G هستند و لذا هر دو tـمنتظم هستند. ولی

$$\deg_{G_۱} x = r - ۱, \deg_{G_۲} x = r$$

که با نتیجهٔ قبلی در تناقض است. در نتیجه $r = ۰$ یا $r = p - ۱$ و لذا $G = \overline{K_p}$ یا $G = K_p$.

۷) با استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای $n = ۱$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $۱, ۲, \ldots, n - ۱$ درست باشد و G گرافی ساده با $۳n$ رأس باشد که درجهٔ هر رأس آن حداقل $۳n - ۳$

است. در این صورت $\overline{G}$ گرافی $3n$ رأسی است که درجهٔ هر رأس آن حداکثر ۲ است. در نتیجه هر مؤلفهٔ همبندی $\overline{G}$ یک دور یا یک مسیر است. برای اثبات حکم باید ثابت کنیم که رأسهای $\overline{G}$ را می‌توان به سه دستهٔ مستقل n رأسی A، B، و C افراز کرد. می‌گوییم یک مؤلفه همبندی $\overline{G}$ با k رأس به ترتیب از نوع اول، دوم و سوم است هرگاه $k \overset{3}{\equiv} 0$، $k \overset{3}{\equiv} 1$ و $k \overset{3}{\equiv} 2$. در این صورت حالتهای زیر را داریم

الف) $\overline{G}$ حداقل یک مؤلفه همبندی از نوع اول دارد.

ب) $\overline{G}$ حداقل ۳ مؤلفه همبندی از نوع دوم دارد.

ج) $\overline{G}$ حداقل ۳ مؤلفه همبندی از نوع سوم دارد.

د) $\overline{G}$ حداقل یک مؤلفه همبندی از نوع دوم و یک مؤلفه همبندی از نوع سوم دارد.

در هر حالت جداگانه حکم را ثابت می کنیم.

الف) فرض کنید رأسهای یک مؤلفه همبندی از نوع اول به صورت $v_1, v_2, \ldots, v_{3t}$ باشد که به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, 3t - 1$، v_i و v_{i+1} مجاورند. (و احتمالاً v_1 و v_{3t} نیز مجاورند بسته به اینکه این مؤلفه همبندی دور یا مسیر باشد.) حال رأسهای $v_1, v_4, \ldots, v_{3t-2}$ را در A، رأسهای $v_2, v_5, \ldots, v_{3t-1}$ را در B و مابقی رأسهای این مؤلفه را در C قرار می‌دهیم. در حال حاضر هر سه مجموعهٔ A، B، و C دارای t عضو و مستقلند. چنانچه این مؤلفه همبندی را از $\overline{G}$ حذف کنیم گرافی به‌دست می‌آید که تعداد رأسهای آن مضرب ۳ و کمتر از $3n$ و درجه هر رأس آن حداکثر ۲ است. بنا به فرض استقراء رأسهای این گراف را می‌توان به ۳ دستهٔ مستقل با تعداد رأسهای برابر

افراز کرد. چنانچه این سه دسته را به ترتیب به A، B، و C بیافزاییم نتیجه می‌شود A، B، و C سه دسته مستقل n رأسی هستند.

ب) فرض کنید رأسهای ۳ مؤلفهٔ همبندی از نوع دوم به صورت

$$x_1, x_2, \ldots, x_{3r+1},$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_{3s+1},$$

$$z_1, z_2, \ldots, z_{3t+1}$$

باشند به گونه‌ای که رأسهایی که کنار هم نوشته شده‌اند مجاورند و احتمالاً رأسهای اول و آخر هر سطر نیز مجاورند بسته به اینکه مؤلفه همبندی مورد نظر دور یا مسیر باشد. حال رأسهای

$$x_1, x_4, \ldots, x_{3r-2}; y_2, y_5, \ldots, y_{3s-1}, y_{3s+1}; z_3, z_6, \ldots, z_{3t}$$

را در A، رأسهای

$$x_2, x_5, \ldots, x_{3r-1}, x_{3r+1}; y_3, y_6, \ldots, y_{3s}; z_1, z_4, \ldots, z_{3t-2}$$

را در B و مابقی رأسهای این ۳ مؤلفهٔ همبندی را در C قرار می‌دهیم. در این صورت A، B، و C هر سه دارای $r + s + t + 1$ رأس و مستقلند. با حذف این سه مؤلفه از $\overline{G}$ و استفاده از فرض استقراء همانند استدلال قسمت الف حکم مسأله را نتیجه می گیریم.

استدلال قسمتهای ج و د نیزمشابه استدلال این دو قسمت است و از نوشتن آن خودداری می‌کنیم.

۸) فرض کنید G گرافی ۷ رأسی و ۴ منتظم باشد، در این صورت $\overline{G}$ گرافی ۷ رأسی و ۲ـمنتظم است. در نتیجه $\overline{G}$ دور ۷ رأسی و یا اجتماع دو دور ۳ و ۴ رأسی است. لذا فقط ۲ گراف ۷ رأسی و ۴ـمنتظم وجود دارد.

۹) فرض کنید u و v دو رأس از G باشند و

$$P : u = x_۰, x_۱, \ldots, x_{k-۱}, x_k = v$$

کوتاهترین مسیر بین u و v در G باشد. اگر $k \geq ۳$، آنگاه زیر گراف القایی روی ۴ رأس $x_۰, x_۱, x_۲, x_۳$ مسیر ۴ رأسی است و این با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه $k \leq ۲$ و لذا بین هر دو رأس از G یک مسیر به طول حداکثر ۲ وجود دارد. پس $\mathrm{diam}(G) \leq ۲$.

۱۰) اگر در kـمکعب دو رأس

$$a_۱ a_۲ \ldots a_k, b_۱ b_۲ \ldots b_k$$

مجاور باشند، طبق تعریف $\sum_{i=۱}^{k}(a_i - b_i) = \pm ۱$ و با توجه به این نکته واضح است که kـمکعب دور به طول ۳ ندارد. از طرفی ۴ رأس

$$۰۰\ldots۰, ۱۰۰\ldots۰, ۰۱۰۰\ldots۰, ۱۱۰۰\ldots۰$$

تشکیل یک دور به طول ۴ می‌دهند. در نتیجه اندازه کمر kـمکعب برابر ۴ است. برای محاسبهٔ قطر kـمکعب توجه می‌کنیم که اگر دو دنباله k تایی از ۰ و ۱ در t مؤلفه اختلاف داشته باشند، فاصله این دو دنباله در kـمکعب برابر t است و در نتیجه فاصلهٔ هر دو رأس در kـمکعب حداکثر برابر k است و فاصله دو رأس

$$۰۰\ldots۰, ۱۱\ldots۱$$

دقیقاً برابر k است. در نتیجه قطر kـمکعب برابر k است.

۱۱) فرض کنید

$$P : u, x_۱, \ldots, x_k, v; \quad Q : v, y_۱, \ldots, y_t, w$$

به ترتیب مسیرهایی به طول $d(u,v)$ و $d(v,w)$ باشند. در این صورت

$$R : u, x_۱, \ldots, x_k, v, y_۱, \ldots, y_t, w$$

گشتی بین u و w با طول $d(u,v) + d(v,w)$ است و در نتیجه مسیری بین u و w با طول کوچکتر یا مساوی $d(u,v) + d(v,w)$ وجود دارد و لذا

$$d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w).$$

۱۲) فرض کنید $v_۱$ رأسی از G با $\deg v_۱ = p - ۲$ و $\{v_۲, v_۳, \ldots, v_{p-۱}\}$ مجموعه همسایه‌های $v_۱$ و v_p رأس pـام باشد که به $v_۱$ متصل نیست. چون $\operatorname{diam}(G) = ۲$ و $v_۱$ و v_p مجاور نیستند پس همسایهٔ مشترک دارند. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید v_p به رأسهای $\{v_k, v_{k+۱}, \ldots, v_{p-۱}\}$ متصل است، پس به‌ازای $i = ۲, ۳, \ldots, k - ۱$، v_i و v_p مجاور نیستند و چون $\operatorname{diam}(G) = ۲$ پس v_i و v_p همسایهٔ مشترک دارند و لذا اندیس $k \leq n_i < p$ موجود است که v_i و v_{n_i} مجاورند و در نتیجه در G حداقل $۲p - ۴$ یال

$$v_۱v_۲, v_۱v_۳, \ldots, v_۱v_{p-۱}; v_kv_p, v_{k+۱}v_p, \ldots, v_{p-۱}v_p;$$

$$v_۲v_{n_۲}, v_۳v_{n_۳}, \ldots, v_{k-۱}v_{n_{k-۱}}$$

وجود دارد و لذا $q \geq ۲p - ۴$.

۱۳) الف) چون G و $\overline{G}$ یکریخت هستند، در نتیجه

$$q(G) = q(\overline{G})$$

از طرفی

$$q(G) + q(\overline{G}) = \binom{p}{۲}$$

در نتیجه

$$۲q(G) = \frac{p(p-۱)}{۲} \Longrightarrow ۴q(G) = p(p-۱) \Longrightarrow ۴|p(p-۱)$$

$$\Longrightarrow ۴|p \vee ۴|p-۱ \Longrightarrow p \overset{۴}{\equiv} ۰ \vee p \overset{۴}{\equiv} ۱.$$

ب) فرض کنید G، رأس از درجهٔ $\frac{p-۱}{۲}$ نداشته باشد و درجهٔ k رأس از G بیشتر از $\frac{p-۱}{۲}$ باشد. در نتیجه درجهٔ $p-k$ رأس از G کمتر از $\frac{p-۱}{۲}$ است. برای هر رأس v

$$\deg_G v + \deg_{\overline{G}} v = p - ۱$$

و لذا $\deg_G v < \frac{p-۱}{۲}$ اگر و تنها اگر $\deg_{\overline{G}} v > \frac{p-۱}{۲}$. در نتیجه در $\overline{G}$، درجهٔ $p-k$ رأس بیشتر از $\frac{p-۱}{۲}$ است. چون G و $\overline{G}$ یکریخت هستند، در نتیجه

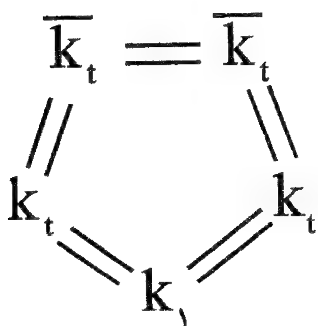
$$k = p - k \Longrightarrow ۲k = p$$

و لذا p زوج است که با $p \overset{4}{\equiv} 1$ در تناقض است.

ج) فرض کنید G و H دو گراف باشند. منظور از $G == H$ گرافی است که از وصل کردن همه رأسهای G به همهٔ رأسهای H به‌دست می‌آید. اگر $p \overset{4}{\equiv} 0$، آنگاه عدد صحیح t وجود دارد که $p = 4t$. حال گراف p رأسی

$$K_t == \overline{K_t} == \overline{K_t} == K_t$$

خود مکمل است. اگر $p \overset{4}{\equiv} 1$، آنگاه عدد صحیح t وجود دارد که $p = 4t + 1$. حال گراف p رأسی



خود مکمل است.

۱۴) فرض کنید u و v دو رأس از G باشند. اگر u و v در G مجاور نباشند، آنگاه این دو رأس در $\overline{G}$ مجاورند و اگر u و v در G مجاور باشند، با توجه به اینکه G ناهمبند است در نتیجه رأس w موجود است که به هیچ یک از u و v در G متصل نیست و لذا w یک همسایهٔ مشترک u و v در $\overline{G}$ است و در نتیجه بین u و v یک مسیر به طول ۲ در $\overline{G}$

موجود است. در نتیجه $\overline{G}$ همبند است و فاصلهٔ هر دو رأس در $\overline{G}$ حداکثر ۲ است و لذا $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leq ۲$.

۱۵) چون $\operatorname{diam}(G) \geq ۳$، در نتیجه دو رأس x و y موجودند که در G مجاور نیستند و همسایهٔ مشترک نیز ندارند. پس هر رأس مانند u حداکثر به یکی از x و y در G متصل است. در نتیجه x و y در $\overline{G}$ مجاورند و هر رأس u حداقل به یکی از x و y در $\overline{G}$ متصل است. حال چنانچه u و v دو رأس غیر مجاور در $\overline{G}$ باشند، طبق بحث اخیر مثلاً u و x در $\overline{G}$ مجاورند. اگر v و x در $\overline{G}$ مجاور باشند، آنگاه uxv یک مسیر به طول ۲ و اگر v و y در $\overline{G}$ مجاور باشند، آنگاه $uxyv$ یک مسیر به طول ۳ بین u و v در $\overline{G}$ است. در نتیجه هر دو رأس در $\overline{G}$ با یک مسیر به طول حداکثر ۳ به یکدیگر متصل می‌شوند و لذا $\overline{G}$ همبند است و $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leq ۳$.

۱۶) چون $\operatorname{diam}(G) \geq ۴$، بنا به مسألهٔ ۱۵، $\overline{G}$ همبند است. اگر نابرابری $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leq ۲$ درست نباشد، آنگاه $\operatorname{diam}(\overline{G}) \geq ۳$ و چون $\overline{\overline{G}} = G$، در نتیجه بنا به مسألهٔ ۱۵، $\operatorname{diam}(G) \leq ۳$ که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه $\operatorname{diam}(\overline{G}) \leq ۲$.

۱۷) چون $\overline{G}$ ناهمبند است در نتیجه $V(G)$ را می‌توان به دو زیر مجموعهٔ ناتهی $V_۱$ و $V_۲$ افراز کرد که بین $V_۱$ و $V_۲$ در $\overline{G}$ هیچ یالی موجود نباشد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید $|V_۱| \leq |V_۲|$ و لذا $|V_۲| \geq \frac{p}{۲}$. اگر $v \in V_۱$، آنگاه v به همهٔ رأسهای $V_۲$ در G متصل است و لذا $\deg_G v \geq \frac{p}{۲}$ و در نتیجه $\Delta(G) \geq \frac{p}{۲}$. حال داریم

$$q(G) = \frac{۱}{۲}\sum \deg_G u \leq \frac{p\Delta(G)}{۲} \leq \Delta^۲(G).$$

۱۸) فرض کنید x_1 رأسی از گراف و $N(x_1) = \{y_1, \ldots, y_t\}$ مجموعهٔ همسایه‌های x باشد. چون اندازه کمر گراف ۴ است، در نتیجه هیچ دوتا از y_i ها مجاور نیستند. چون $\deg y_1 = t$، در نتیجه $t - 1$ رأس $x_2, x_3, \ldots, x_t$ موجودند که به y_1 متصل هستند و لذا گراف مورد نظر حداقل $2t$ رأس دارد. همچنین اگر این گراف دقیقاً $2t$ رأس داشته باشد، آنگاه هر x_j باید به هر y_i متصل باشد و لذا گراف مورد نظر $K_{t,t}$ است که در خواص مورد نظر مسأله نیز صدق می‌کند. پس $K_{t,t}$ تنها گراف tـمنتظم $2t$ رأسی با اندازه کمر ۴ است.

۱۹) فرض کنید x رأسی از گراف و $N(x) = \{y_1, \ldots, y_k\}$ مجموعهٔ همسایه‌های x باشد. چون اندازه کمر گراف ۵ است، در نتیجه هیچ دوتا از y_i ها مجاور نیستند و همسایهٔ مشترک نیز ندارند. فرض کنید $N(y_i) = \{x, z_{i,2}, \ldots, z_{i,k}\}$ مجموعهٔ همسایه‌های y_i باشد، $i = 1, 2, \ldots, k$. در این صورت طبق بحث اخیر $k^2 + 1$ رأس زیر از گراف دو به دو متمایزند.

$$x, y_1, \ldots, y_k, z_{1,2}, \ldots, z_{1,k}, \ldots, z_{k,2}, \ldots, z_{k,k}$$

و لذا گراف مورد نظر مسأله حداقل $k^2 + 1$ رأس دارد. به‌ازای $k = 2, 3$ گرافهای C_5 و پترسن kـمنتظم با اندازه کمر ۵ و شامل $k^2 + 1$ رأس هستند.

۲۰) فرض کنید v رأسی از گراف G باشد. از ۵ رأس باقی‌مانده از G سه رأس x، y و z یافت می‌شوند که یا هر سه به x متصلند و یا هیچ یک

به v متصل نیستند. در حالت اول یا x، y، و z مستقلند و یا حداقل دو تا از آنها مانند x و y مجاورند که در این صورت x، y، و v سه رأس دو به دو مجاورند. در حالت دوم یا x، y، و z دو به دو مجاورند و یا حداقل دوتا از آنها مانند x و y غیر مجاورند. که در این صورت x، y، و v مستقلند. پس در هر صورت یا سه رأس مستقل و یا سه رأس دو به دو مجاور در G وجود دارد.

۲۱) فرض کنید $G = (A, B)$ و $|A| = k$ و در نتیجه $|B| = p - k$. در این صورت

$$q \leq k(p-k) = pk - k^{۲} = -(\frac{p}{۲} - k)^{۲} + \frac{p^{۲}}{۴} \leq \frac{p^{۲}}{۴}$$

برای عدد p داده شده گراف $K_{\lfloor \frac{p}{۲} \rfloor, \lceil \frac{p}{۲} \rceil}$ گرافی دو بخشی با p رأس و $\lfloor \frac{p^{۲}}{۴} \rfloor$ یال است.

۲۲) فرض کنید

$$S = \{(a, b) | a \in A, b \in B, ab \in E(G)\}$$

برای هر $a \in A$ دقیقاً k رأس از B به a متصلند و لذا $|S| = k|A|$ و با تکرار همین استدلال برای B نتیجه می‌گیریم $|S| = k|B|$. چون $k > ۰$، در نتیجه $|A| = |B|$.

۲۳) فرض کنید

$$A = \{a_{۱}a_{۲}\ldots a_k | a_i \in \{۰, ۱\}, ۲ | a_{۱} + a_{۲} + \cdots + a_k\}$$

$$B = \{a_{۱}a_{۲}\ldots a_k | a_i \in \{۰, ۱\}, ۲ \nmid a_{۱} + a_{۲} + \cdots + a_k\}$$

در این صورت با توجه به تعریف kـمکعب، A و B افرازی از رأسهای kـمکعب به دو زیر مجموعهٔ مستقل هستند و لذا kـمکعب گرافی دو بخشی است.

۲۴) فرض کنید $S = \{x_۱, x_۲, \ldots, x_n\}$ و

$$A_i = \{x_i\} \cup N(x_i), \quad i = ۱, ۲, \ldots, n$$

در این صورت طبق فرض مجموعه‌های $k + ۱$ رأسی $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ دو به دو مجزا هستند. پس kـمکعب حداقل $n(k + ۱)$ رأس دارد و لذا

$$n(k + ۱) \leq ۲^k \Longrightarrow n \leq \frac{۲^k}{k + ۱}.$$

۲۵) فرض کنید $G_۱, G_۲, \ldots, G_k$ زیر گرافهای فراگیر و دو بخشی K_n باشند به طوری که

$$E(G_۱) \cup E(G_۲) \cup \cdots \cup E(G_k) = E(K_n) \quad (*)$$

همچنین فرض کنید که $G_i = (A_i, B_i)$ که $A_i \cup B_i = V(K_n)$، $i = ۱, ۲, \ldots, k$. برای رأس v از K_n دنباله k تایی $(a_۱, a_۲, \ldots, a_k)$ از ۰ و ۱ را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$a_i = \begin{cases} ۱ & v \in A_i \\ ۰ & v \in B_i \end{cases}, i = ۱, ۲, \ldots, k$$

اگر $n > ۲^k$، چون دقیقاً ۲^k دنبالهٔ kتایی از ۰ و ۱ وجود دارد، دو رأس u و v از K_n موجود است که دنباله‌های kـتایی متناظر آنها برابر

است. طبق تعریف برای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، u و v در یک بخش از گراف دو بخشی G_i قرار دارند و لذا یال uv در هیچ یک از گرافهای $G_۱, \ldots, G_k$ نیامده است که با $(*)$ در تناقض است. پس اگر یالهای K_n را بتوان به صورت اجتماع یالهای k زیر گراف فراگیر و دو بخشی نوشت، آنگاه $n \leq ۲^k$.

به ازای $n = ۲^k$ به هر رأس K_n یک دنباله kـتایی از ۰ و ۱ متناظر می‌کنیم. مثلاً فرض کنید به رأس v از K_n دنبالهٔ $(v_۱, v_۲, \ldots, v_k)$ متناظر شده است. قرار می‌دهیم

$$A_i = \{v \in V(K_n) | v_i = ۱\}, B_i = V(K_n) - A_i$$

و G_i را زیر گراف فراگیر و دو بخشی K_n می‌گیریم که شامل همه یالهایی است که یک سر آنها در A_i و سر دیگر آنها در B_i است، $i = ۱, ۲, \ldots, k$. ادعا می‌کنیم $(*)$ برای این گرافهای دو بخشی برقرار است. زیرا برای یال uv از K_n، چون $(u_۱, \ldots, u_n) \neq (v_۱, \ldots, v_n)$، لذا اندیس $۱ \leq i \leq k$ موجود است که $u_i \neq v_i$ و لذا uv یالی از G_i است. در نتیجه به‌ازای $n = ۲^k$ یالهای K_n را می‌توان به صورت اجتماع یالهای k زیر گراف فراگیر و دو بخشی نوشت و در نتیجه ۲^k بزرگترین عدد طبیعی n با این خاصیت است.

۲۶) فرض کنید x رأسی از G باشد. با استقراء روی n ثابت می‌کنیم حداکثر $k(k-۱)^{n-۱}$ رأس به فاصلهٔ n از x وجود دارد. برای $n = ۱$ حکم واضح است زیرا $\deg x = k$. فرض کنید حکم برای n درست

باشد و v رأسی از G باشد که $d(x,v) = n + 1$ و

$$P : x, y_1, \ldots, y_n, v$$

مسیری به طول $n+1$ بین x و v باشد. در این صورت $d(x,y_n) = n$ (چرا؟) و در نتیجه هر رأس به فاصلهٔ $n + 1$ از x مجاور رأسی به فاصلهٔ n از x است. طبق فرض استقراء حداکثر $k(k-1)^{n-1}$ رأس به فاصلهٔ n از x موجود است. فرض کنید u رأسی از G باشد که $d(x,u) = n$. طبق فرض $\deg u = k$. طبق نتیجه‌ای که اکنون حاصل شد فاصلهٔ حداقل یکی از همسایه‌های u از x برابر $n-1$ است و در نتیجه فاصلهٔ حداکثر $k-1$ رأس از همسایه‌های u از x برابر $n+1$ است و در نتیجه حداکثر $k(k-1)^n$ رأس به فاصلهٔ $n+1$ از x وجود دارد. حال طبق فرض $\operatorname{diam}(G) = d$ و لذا به‌ازای $n > d$، هیچ رأسی به فاصلهٔ n از x وجود ندارد و در نتیجه

$$p(G) \leq 1+k+k(k-1)+\cdots+k(k-1)^{d-1} = 1+\frac{k(k-1)^d-1}{k-2}$$

۲۷) $K_{2,3}$ زیرگراف هیچ kـمکعبی نیست. زیرا در غیر این صورت عدد k و رأسهای $u = u_1u_2\ldots u_k$ و $v = v_1v_2\ldots v_k$ از kـمکعب موجودند که سه همسایهٔ مشترک دارند. مثلاً فرض کنید

$$x = x_1x_2\ldots x_k, y = y_1y_2\ldots y_k, z = z_1z_2\ldots z_k$$

سه همسایهٔ مشترک u و v باشند. با توجه به تعریف kـمکعب، اندیسهای i و j موجودند که $x_i \neq u_i$ و $x_j \neq v_j$ و به‌ازای $t \neq i$،

$x_t = u_t$ و به‌ازای $j \neq t$، $x_t = v_t$. همچنین چون u و v متمایزند، پس $i \neq j$. در نتیجه به‌ازای $t \neq i, j$، $x_t = u_t = v_t$. بنا به همین استدلال به‌ازای $t \neq i, j$، $x_t = y_t = z_t = u_t = v_t$. اما حداکثر ۴ دنبالهٔ kتایی از ۰ و ۱ موجود است که به‌جز مؤلفه‌های iام و jام آنها مقادیر ثابت باشد. تناقض حاصل حکم مسأله را ثابت می کند.

۲۸) فرض کنید v رأسی از G با درجهٔ δ باشد، در این صورت $q(G-v) = q(G) - \delta$. دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول. $\delta \leq \frac{p}{۲}$.

در این حالت داریم

$$q(G) > \frac{p^۲}{۴} \Longrightarrow q(G) \geq \frac{p^۲+۱}{۴} \Longrightarrow q(G-v) = q(G) - \delta$$

$$\geq \frac{p^۲+۱}{۴} - \frac{p}{۲} = \frac{(p-۱)^۲}{۴}$$

تساوی $q(G-v) = \frac{(p-۱)^۲}{۴}$ تنها وقتی رخ می‌دهد که $q(G) = \frac{p^۲+۱}{۴}$ و $\delta = \frac{p}{۲}$. ولی این دو تساوی با هم اتفاق نمی‌افتند. زیرا اولی نتیجه می‌دهد p فرد است و دومی نتیجه می‌دهد p زوج است. در نتیجه $q(G-v) > \frac{(p-۱)^۲}{۴}$.

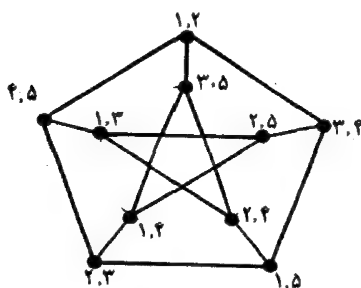
حالت دوم. $\delta \geq \frac{p+۱}{۲}$.

$$q(G-v) = q(G) - \delta = \frac{۱}{۲}\sum \deg_G v - \delta \geq \frac{p}{۲}\delta - \delta = \frac{p-۲}{۲}\delta$$

$$\geq \frac{(p-۲)(p+۱)}{۴} = \frac{p^۲-p-۲}{۴} > \frac{(p-۱)^۲}{۴}$$

توجه کنید در نابرابری آخر از شرط $p \geq ۴$ استفاده شد.

۲۹) الف) چنانچه گراف پترسن را همانند شکل با زیر مجموعه‌های ۲ عضوی $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ برچسب گذاری کنیم، نتیجه می‌شود $O_۲$ با گراف پترسن یکریخت است.



شکل ۳۶

ب) فرض کنید

$$A_{۲i-۱} = \{i, i+۱, \ldots, i+k-۱\}, \quad i = ۱, ۲, \ldots, k+۱$$

$$A_{۲i} = \{k+i+۱, k+i+۲, \ldots, ۲k+۱, ۱, \ldots, i-۱\}, \; i = ۱, \ldots, k$$

در این صورت

$$A_۱, A_۲, \ldots, A_{۲k+۱}, A_۱$$

یک دور به طول $۲k+۱$ در G است و درنتیجه O_k دور فرد دارد و لذا دو بخشی نیست.

ج) توجه کنید که اگر A, B, C یک مسیر در O_k باشد، آنگاه

$$B = (A \cup C)', \quad |A \cap C| = k-۱$$

حال ثابت می‌کنیم O_k به‌ازای $k \geq ۳$، دور به طول ۳، ۴، و ۵ ندارد.

اگر A, B, C, A یک دور به طول ۳ در O_k باشد، آنگاه از یک سو $|A \cap C| = k - ۱$ و از سوی دیگر $A \cap C = \emptyset$ که این دو با یکدیگر در تناقض هستند. (زیرا $k \geq ۳$)

اگر A, B, C, D, A یک دور به طول ۴ در O_k باشد، آنگاه

$$B = (A \cup C)', \quad D = (C \cup A)'$$

و لذا $B = D$ و درنتیجه A, B, C, D, A دور نیست.

اگر A, B, C, D, E, A یک دور به طول ۵ در O_k باشد، آنگاه

$$|A \cap C| = k - ۱, |C \cap E| = k - ۱, |A \cap E| = \emptyset$$

در نتیجه

$$۲k = |A \cup E| \leq |A \cup C \cup E| = |A| + |C| + |E| - |A \cap C|$$

$$-|A \cap E| - |C \cap E| + |A \cap C \cap E|$$

$$= k + k + k - (k - ۱) - ۰ - (k - ۱) + ۰ = k + ۲$$

و در نتیجه $k \leq ۲$ که با فرض در تناقض است.

در نتیجه $g(O_k) \geq ۶$. حال با توجه به الگوی قسمت الف می‌توانیم یک دور به طول ۶ در O_k به صورت زیر ارایه دهیم.

فرض کنید X و Y دو زیر مجموعهٔ $k-۲$ عضوی مجزای $\{۶, ۷, \ldots, ۲k+۱\}$ باشند. در این صورت

$$\{۱, ۲\} \cup X, \{۳, ۴\} \cup Y, \{۱, ۵\} \cup X, \{۲, ۴\} \cup Y, \{۱, ۳\} \cup X,$$

$$\{۴, ۵\} \cup Y, \{۱, ۲\} \cup X$$

یک دور به طول ۶ در O_k است. در نتیجه $g(O_k) = ۶$.

۳۰) چون G همبند است از هر مؤلفهٔ همبندی $G - v$ رأسی وجود دارد که در G مجاور v است. همچنین اگر u و v در G مجاور باشند، آنگاه $\deg_{G-v} u = \deg_G u - ۱$ و اگر u و v در G مجاور نباشند $\deg_{G-v} u = \deg_G u$. در نتیجه درجهٔ همهٔ رأسهای مجاور v در $G - v$ عددی فرد و درجهٔ مابقی رأسها عددی زوج است. بنا به نتیجهٔ قضیهٔ ۱ تعداد رأسهای فرد در هر مؤلفهٔ همبندی $G - v$ عددی زوج است و لذا هر مؤلفهٔ همبندی $G - v$ حداقل ۲ رأس فرد دارد. اما تعداد رأسهای فرد گراف $G - v$ برابر $\deg v$ است و درنتیجه

$$w(G - v) \leq \frac{۱}{۲} \deg v.$$

۳۱) فرض کنید G' یک مؤلفهٔ همبندی G باشد. چون G رأس تنها ندارد، درنتیجه $p(G') \geq ۲$. حال سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول. G بیش از دو مؤلفه همبندی دارد.

فرض کنید $G_۱$، $G_۲$، و $G_۳$ سه مؤلفه همبندی G باشند. چون هر مؤلفهٔ همبندی حداقل دو رأس دارد، در نتیجه G_i شامل دو

رأس مجاور u_i و v_i است، $i = ۱, ۲, ۳$. حال زیر گراف القایی روی رأسهای $\{u_۱, u_۲, u_۳, v_۱, v_۲, v_۳\}$ شامل سه یال است و این با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه $w(G) \leq ۲$.

حالت دوم. G دقیقاً دو مؤلفه همبندی دارد.

فرض کنید $G_۱$ و $G_۲$ مؤلفه‌های همبندی G باشند و مثلاً $p(G_۱) \geq p(G_۲)$. چون هیچ زیر گراف القایی G شامل ۳ یال نیست در نتیجه G مثلث ندارد. حال اگر $p(G_۱) \geq ۳$ باشد، با توجه به بحث اخیر $G_۱$ کامل نیست و لذا بنا به مسألهٔ ۲ از همین فصل، $G_۱$ شامل سه رأس u، v، و w است که $uv, vw \in E(G_۱)$ و $uw \notin E(G_۱)$. همچنین $G_۲$ شامل دو رأس مجاور x و y است. حال زیر گراف القایی روی رأسهای $\{x, y, u, v, w\}$ شامل ۳ یال است که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه $p(G_۱) \leq ۲$ و لذا از $۲ \leq p(G_۲) \leq p(G_۱) \leq ۲$ نتیجه می‌شود که G دقیقاً ۴ رأس دارد.

حالت سوم. G همبند است.

فرض کنید $p(G) \geq ۵$ باشد و u و v دو رأس از G و

$$P : u = x_۰, x_۱, \ldots, x_{k-۱}, x_k = v$$

کوتاهترین مسیر بین u و v در G باشد. اگر $k \geq ۳$، آنگاه زیر گراف القایی روی رأسهای $\{x_۰, x_۱, x_۲, x_۳\}$ شامل سه یال است که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه $k \leq ۲$ و لذا دو رأس u و v مجاورند و یا همسایهٔ مشترک دارند. چون $p(G) \geq ۵$ و G مثلث ندارد، در نتیجه G کامل نیست و لذا دو رأس غیر مجاور x و y در G وجود دارد. طبق بحث اخیر x و y همسایهٔ مشترکی مانند z دارند.

اگر رأس w غیر از x و y موجود باشد که به z متصل است، در این صورت چون G مثلث ندارد، z به هیچ یک از x و y متصل نیست. در نتیجه زیر گراف القایی روی رأسهای $\{x, y, z, w\}$ شامل ۳ یال است که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه فقط دو رأس x و y مجاور z هستند. حال چون $p(G) \geq ۵$ است، لذا دو رأس u و v غیر از x، y، و z در G موجودند و با توجه به بحث اخیر هیچ کدام به z متصل نیستند و لذا هر یک همسایه‌ای مشترک با z دارند. پس هر یک از u و v حداقل به یکی از x و y متصل هستند. اگر u فقط به یکی از x و y متصل باشد، زیر گراف القایی روی رأسهای $\{x, y, z, u\}$ شامل ۳ یال است. که با فرض مسأله در تناقض است. درنتیجه u و به طور مشابه v به هر دو رأس x و y متصل هستند. چون G مثلث ندارد، u و v مجاور نیستند. حال زیر گراف القایی روی رأسهای $\{x, z, u, v\}$ شامل ۳ یال است که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه G حداکثر ۴ رأس دارد.

۳۲) اگر یالهای $K_{m,n}$ را بتوانیم به یالهای دو زیر گراف یکریخت افراز کنیم در این صورت تعداد یالهای $K_{m,n}$ عددی زوج است و لذا mn عددی زوج است. اگر mn عددی زوج باشد، در این صورت حداقل یکی از m و n، مثلاً n، زوج است و لذا $K_{m,n}$ را می‌توان به دو زیر گراف یکریخت با $K_{m,\frac{n}{۲}}$ افراز کرد. در نتیجه جواب مسأله عبارتست از تمام زوجهای (m, n) که mn عددی زوج است.

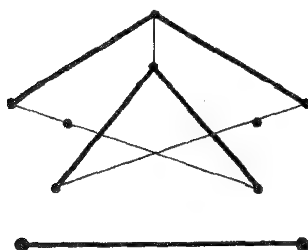
۳۳) اگر K_n را بتوانیم به ۳ زیر گراف یکریخت افراز کنیم، در این صورت تعداد یالهای K_n یعنی $\frac{n(n-۱)}{۲}$ بر ۳ بخش‌پذیر است و لذا $n \overset{۳}{\equiv} ۰ \vee ۱$. برای اثبات عکس این مطلب از لم بعد استفاده می‌کنیم.

لم. اگر K_n را بتوانیم به ۳ زیر گراف یکریخت افراز کنیم، در این صورت K_{n+3} را نیز می‌توانیم به ۳ زیر گراف یکریخت افراز کنیم.

اثبات. فرض کنید u_1، u_2، و u_3 سه رأس $G = K_{n+3}$ باشند. طبق فرض $G - \{u_1, u_2, u_3\}$ را می‌توان به ۳ زیر گراف فراگیر و یکریخت H_1، H_2، و H_3 افراز کرد. فرض کنید G_i گرافی باشد که از اجتماع H_i و یال u_iu_{i+1} و متصل کردن u_i به تمام رأسهای H_i به‌دست می‌آید، $i = 1, 2, 3$. (منظور از u_4 همان u_1 است.) در این صورت G_1، G_2، و G_3 افرازی از G به ۳ زیر گراف یکریخت است.

حال بنا به این لم و با توجه به اینکه K_1 و K_3 را می‌توان به ۳ زیر گراف یکریخت افراز کرد، نتیجه می‌شود که به‌ازای $n \overset{3}{\equiv} 0$ و $n \overset{3}{\equiv} 1$، K_n را می‌توان به ۳ زیر گراف یکریخت افراز کرد.

۳۴) در شکل زیر فرض کنید H_1 زیر گرافی از گراف پترسن باشد که یالهای آن پررنگ رسم شده و H_2 زیر گرافی باشد که یالهای آن به صورت معمول رسم شده و H_3 زیر گرافی باشد که یالهای آن رسم نشده است. در این صورت H_1، H_2، و H_3 گراف پترسن را به ۳ زیر گراف یکریخت افراز می‌کنند.



شکل ۳۷

۳۵) به‌وضوح رأس ۱ به هر رأسی در G متصل است. همچنین دو رأس ۲ و ۴ مجاور نیستند و لذا $\text{diam}(G) = ۲$. همچنین ۳ رأس ۱، ۲، و ۳ دو به دو مجاورند و لذا $g(G) = ۳$.

۳۶) گراف مورد نظر دو دور فرد دارد که در یک یال مشترکند؛ با حذف این یال گراف حاصل دور فرد ندارد و لذا دو بخشی است. واضح است که با حذف هیچ یال دیگری، گراف حاصل دو بخشی نیست. در نتیجه فقط یک زیر گراف دو بخشی با ۱۰ یال وجود دارد.

۳۷) فرض کنید $G = (A, B)$ گرافی دو بخشی و H زیر گرافی از G باشد. قرار دهید

$$A' = A \cap V(H), B' = B \cap V(H)$$

در این صورت A' و B' دو مجموعهٔ مستقل در H هستند و یکی از آنها حداقل $\lceil \frac{p(H)}{۲} \rceil$ عضو دارد. بر عکس اگر G دو بخشی نباشد، دور فرد دارد. فرض کنید H دور فردی در G باشد. در این صورت هر مجموعهٔ مستقل در H حداکثر $\frac{p(H)-۱}{۲}$ رأس دارد و لذا هیچ مجموعهٔ مستقلی در H شامل $\lceil \frac{p(H)}{۲} \rceil = \frac{p(H)+۱}{۲}$ عضو وجود ندارد.

۳۸) واضح است که G هنگامی حداکثر تعداد یال را دارد که یالهای مابین a رأس از گراف K_n را حذف کنیم. در نتیجه G حداکثر $\binom{n}{۲} - \binom{a}{۲}$ یال دارد.

۴.۱۰ حل مسایل فصل پنجم

۱) فرض کنید G گرافی با n رأس و k یال و F زیر جنگلی فراگیر از G باشد به گونه‌ای که مؤلفه‌های همبندی F، زیردرختهای فراگیر از مؤلفه‌های همبندی G باشند. در این صورت $w(F) = w(G)$ و $q(F) \leq q(G)$ و در نتیجه

$$w(G) = w(F) = n - q(F) \geq n - q(G) = n - k.$$

۲) واضح است.

۳) چون v رأس برشی گراف G است، در نتیجه $G - v$ ناهمبند است. لذا بنا به مسألهٔ ۱۴ از فصل ۴، $\overline{G-v}$ همبند است. اما $\overline{G-v} = \overline{G} - v$، در نتیجه $\overline{G} - v$ همبند است.

۴) فرض کنید T یک زیر درخت فراگیر از G و u و v دو برگ از T باشند. بنا به قضیهٔ ۲۷، $T - u$ و $T - v$ همبند هستند و لذا $G - u$ و $G - v$ نیز همبند می‌باشند. در نتیجه u و v رأس برشی G نیستند.

۵) فرض کنید حکم مسأله درست نباشد و

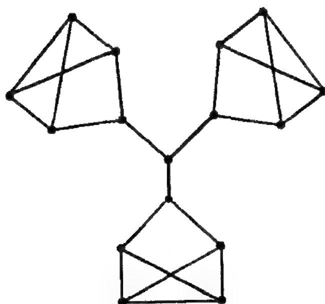
$$P : x_0, x_1, \ldots, x_k$$

بلندترین مسیر در G باشد. در این صورت چون G همبند است، $H = G - x_0$ نیز همبند است. اگر $H - x_1$ ناهمبند باشد، رأس y مجاور x_1 موجود است که y در P ظاهر نشده و به هیچ یک از رأسهای $x_2, x_3, \ldots, x_k$ متصل نیست. اگر y به رأسی مانند z غیر از x_1 متصل باشد، در این صورت

$$z, y, x_1, x_2, \ldots, x_k$$

مسیری با طول بزرگتر از طول P است که با تعریف P در تناقض است. در نتیجه $\deg y = 1$. چنانچه در استدلال فوق جای x_0 و y را عوض کنیم نتیجه می‌شود $\deg x_0 = 1$ و لذا x_0 و y_1 دو رأس درجهٔ ۱ هستند که x_1 همسایهٔ مشترک آنها است و این با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه $H - x_1$ همبند است و لذا اگر x_0 و x_1 را از G حذف کنیم گراف حاصل همچنان همبند است.

۶) الف)



شکل ۳۸

ب) فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $\{a, b_۱, \ldots, b_{۲k}, c_۱, \ldots, c_{۲k}\}$ و مجموعهٔ یالهای

$$\{ab_۱, \ldots, ab_k\} \cup \{b_i c_j | i, j = ۱, ۲, \ldots ۲k\} \cup \{c_۱c_۲, c_۳c_۴, \ldots, c_{۲k-۱}c_{۲k}\}$$

حال $۲k + ۱$ کپی از G در نظر بگیرید و متناظر رأس a در هر کپی را به رأسی مانند v وصل کنید. در این صورت گرافی $۲k + ۱$ـمنتظم به‌دست می‌آید که هر یال متصل به v یک یال برشی آن است.

۷) فرض کنید xy یک یال برشی G باشد. در این صورت بنا به قضیهٔ ۱۴، $G - xy$ شامل دو مؤلفهٔ همبندی یکی شامل x و دیگری شامل y است. حال در مؤلفهٔ همبندی شامل x درجهٔ همهٔ رأسها به غیر از x زوج است و این با نتیجهٔ قضیهٔ ۱ در تناقض است. لذا G یال برشی ندارد.

۸) فرض کنید xy یک یال برشی G باشد. در این صورت بنا به قضیهٔ ۱۴، $G - xy$ شامل دو مؤلفهٔ همبندی، یکی شامل x و دیگری شامل y است. چون G دو بخشی است، در نتیجه مؤلفهٔ همبندی $G - xy$ که شامل x است نیز دو بخشی است. فرض کنید $H = (A, B)$ مؤلفه همبندی مورد نظر باشد و $x \in A$. درجهٔ هر رأس در H به غیر از x برابر k است، لذا اگر $|A| = m$ و $|B| = n$، در این صورت تعداد یالهای H از یک طرف برابر nk است و از طرف دیگر برابر $(m - ۱)k + k - ۱$. در نتیجه $nk = mk - ۱$ ولی چون $k > ۱$، این تساوی برقرار نیست و لذا G یال برشی ندارد.

۹) الف) چنانچه P مسیری بین v و u به طول $d_H(u, v)$ در H باشد، در این صورت P مسیری بین u و v در G نیز هست و چون

$d_G(u,v)$ طول کوتاهترین مسیر بین u و v در G است، در نتیجه $d_G(u,v) \leq d_H(u,v)$.

ب) فرض کنید T زیر درختی فراگیر از G باشد. در این صورت بنا به الف و قضیهٔ ۳۰

$$\sum_{v\in V(G)} d_G(u,v) \leq \sum_{v\in V(G)} d_T(u,v) \leq \binom{n}{۲}.$$

۱۰) حل مسأله ساده است. فقط قید می‌کنیم که به ازای $n = ۱,۲,۳$ فقط یک درخت n رأسی، همچنین به ازای $n = ۴,۵,۶$ به ترتیب ۲,۳,۵ درخت n رأسی موجود است.

۱۱) اگر G درخت و $e = xy$ یالی از $\overline{G}$ باشد، در این صورت هر دور C از $G+e$ شامل یال e است و لذا $C - e$ مسیری بین x و y در G است و چون مسیر بین x و y در G منحصر به فرد است در نتیجه دور C نیز منحصر به فرد است. لذا G دقیقاً شامل یک دور است.

۱۲) فرض کنید $(d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ دنبالهٔ درجه‌ای T باشد به گونه‌ای که $d_۱ \leq d_۲ \leq \cdots \leq d_n = \Delta$. در این صورت $\sum_{i=۱}^{n} d_i = ۲n - ۲$. اگر T کمتر از Δ برگ داشته باشد، در این صورت $d_\Delta \geq ۲$ و لذا

$$۲n - ۲ = d_۱ + \cdots + d_{\Delta-۱} + d_\Delta + \cdots + d_{n-۱} + d_n$$

$$\geq ۱+\cdots+۱+۲+\cdots+۲+\Delta = \Delta-۱+۲(n-\Delta)+\Delta = ۲n-۱$$

تناقض حاصل نشان می‌دهد که T حداقل Δ برگ دارد.

۱۳) $\sum ia_i$ برابر مجموع درجهٔ رأسهای T است. لذا بنا به قضیهٔ ۱

$$\sum ia_i = ۲q(T) = ۲n - ۲.$$

۱۴) فرض کنید $(d_۱, d_۲, \ldots, d_n)$ دنبالهٔ درجه‌ای T باشد. در این صورت $\sum_{i=۱}^{n} d_i = ۲n - ۲$ و لذا

$$a = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{۲n - ۲}{n} = ۲ - \frac{۲}{n} \Longrightarrow n = \frac{۲}{۲ - a}.$$

۱۵) درخت T، $t + k - ۱$ رأس و در نتیجه $t + k - ۲$ یال دارد. لذا

$$۲(t + k - ۲) = t + ۲ + ۳ + \cdots + k = t - ۱ + \frac{k(k + ۱)}{۲}$$

$$\Longrightarrow t = \frac{k^۲ - ۳k + ۶}{۲}.$$

۱۶) با استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای $n = ۲$ که حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $n - ۱$ درست باشد و $d_۱ \geq d_۲ \geq \cdots \geq d_n$ عددهای طبیعی با مجموع $۲n - ۲$ باشند. همانند استدلال مسألهٔ ۱۲ نتیجه می‌گیریم $d_n = ۱$. همچنین واضح است که $d_۱ \geq ۲$. حال $d_۱ - ۱, d_۲, \ldots, d_{n-۱}$ عددهایی طبیعی با مجموع $۲n - ۴$ هستند و لذا بنا به فرض استقراء $(d_۱ - ۱, d_۲, \ldots, d_{n-۱})$ دنبالهٔ درجه‌ای درختی مانند T است.

چنانچه یک رأس به T اضافه و آن را به رأس با درجهٔ $d_1 - 1$ متصل کنیم درختی با دنبالهٔ درجه‌ای $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ به‌دست می‌آید و لذا حکم ثابت می‌شود.

۱۷) فرض کنید

$$P : x_0, x_1, \ldots, x_k$$

بلندترین مسیر در T باشد. چون T درختی با حداقل ۲ رأس است، در نتیجه $k \geq 1$ و x_0 و x_k دو برگ از T هستند. بنا به فرض مسأله $\deg x_1 \geq 3$ و لذا به غیر از x_0 و x_2 رأسی مانند y مجاور x_1 وجود دارد. اگر رأسی مانند z غیر از x_1، مجاور y موجود باشد، در این صورت چون T دور ندارد، y و z در P ظاهر نشده‌اند و لذا

$$Q : z, y, x_1, x_2, \ldots, x_k$$

مسیری با طول بزرگتر از طول P است که با انتخاب P در تناقض است. در نتیجه y هیچ همسایه‌ای غیر از x_1 ندارد و لذا $\deg y = 1$. در نتیجه x_0 و y دو برگ از T هستند که x_1 همسایهٔ مشترک آنها است.

۱۸) فرض کنید T یک زیر درخت فراگیر از G و u برگی از T باشد. در این صورت $T - u$ همبند و لذا $G - u$ همبند است و در نتیجه u رأس برشی G نیست. در نتیجه طبق فرض مسأله، T حداکثر دو برگ دارد. از طرفی می‌دانیم هر درخت با بیش از یک رأس حداقل دو برگ دارد و لذا T دقیقاً دو برگ دارد و در نتیجه T با مسیر n رأسی

P_n یکریخت است. فرض کنید رأسهای T به ترتیب موجود در مسیر به صورت

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

باشند. اگر G دور داشته باشد، در این صورت اندیسهای i و j یافت می‌شوند که $j \geq i + 2$ و x_i و x_j مجاورند. در این صورت رأس x_{i+1} یک رأسی غیر برشی G است که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه G دور ندارد و لذا یک درخت است و چون T یک زیر درخت فراگیر G است پس $G = T$ و لذا G با مسیر n رأسی P_n یکریخت است.

۱۹) فرض کنید T زیر درختی فراگیر از G باشد. اگر $e \in E(T)$ که حکم ثابت است و الا $T + e$ شامل یک دور است. فرض کنید e' یالی از این دور غیر از e باشد. در این صورت $T + e - e'$ زیر درختی فراگیر از G شامل یال e است.

۲۰) فرض کنید G دقیقاً یک دور داشته باشد و e یالی از این دور باشد. در این صورت $G - e$ گرافی همبند و بدون دور است و لذا درخت است. در نتیجه $G - e$، $n - 1$ یال دارد و لذا G n یال دارد. برعکس اگر G گرافی ساده و همبند شامل n رأس و n یال باشد، در این صورت بنا به نتیجهٔ قضیهٔ ۱۸، G دور دارد. اگر e یالی از این دور باشد، آنگاه $G - e$ همبند، شامل n رأس و $n - 1$ یال است و لذا درخت است. در نتیجه $G - e$ دور ندارد و لذا G دقیقاً یک دور دارد.

۲۱) فرض کنید T درختی n رأسی باشد، با استقراء روی n حکم را ثابت می‌کنیم. برای $n = 2$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای

درختهای کمتر از n رأس درست باشد و T درختی n رأسی باشد که $n \geq ۴$ عددی زوج است. فرض کنید v رأسی از T با $\deg v > ۱$ باشد. بنا به قضیهٔ ۲۷، v یک رأسی برشی T است و لذا $T - v$ ناهمبند است. فرض کنید $G_۱, G_۲, \ldots, G_k$ مؤلفه‌های همبندی $T - v$ باشند به گونه‌ای که تعداد رأسهای $G_۱, G_۲, \ldots, G_r$ عددی فرد و تعداد رأسهای مابقی مؤلفه‌های همبندی عددی زوج است. بنا به فرض استقراء به‌ازای $i = r + ۱, \ldots, k$، G_i زیر گرافی فراگیر مانند H_i دارد که درجهٔ هر رأس H_i عددی فرد است. همچنین اگر به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, r$، $G_i^* = T[V(G_i) \cup \{v\}]$ باشد در این صورت G_i^* درختی است که تعداد رأسهای آن زوج و از n کمتر است و لذا طبق فرض استقراء زیر گرافی فراگیر مانند H_i دارد که درجهٔ هر رأس در H_i عددی فرد است. فرض کنید H زیر گراف القایی T روی یالهای H_i ها باشد، یعنی $H = T[\cup_{i=۱}^{k} E(H_i)]$، در این صورت H زیر گرافی فراگیر از T است که هر رأس آن فرد است. زیرا برای هر رأس u غیر از v اندیس منحصر بفرد i موجود است که $u \in V(H_i)$ و لذا $\deg_H u = \deg_{H_i} u$ و در نتیجه درجهٔ u در H عددی فرد است. همچنین چون n زوج است در نتیجه تعداد مؤلفه‌های همبندی فرد $T - v$، یعنی r، عددی فرد است. همچنین درجهٔ v در G_i^* برابر ۱ و در نتیجه H_i نیز برابر ۱ است، $i = ۱, ۲, \ldots, r$. و لذا $\deg_H v = r$ عددی فرد است.

حال اگر H و G دو زیر گراف فراگیر متمایز T باشند که درجهٔ هر رأس در آنها عددی فرد باشد، در این صورت $L = T[E(H) \Delta E(G)]$، یعنی زیر گراف القایی روی تمام یالهایی از

G و H که فقط در یکی از G و H قرار دارند، زیر گرافی از T است که درجهٔ هر رأس آن عددی زوج است و چون L گراف القایی یالی است، در نتیجه رأس تنها ندارد و لذا درجهٔ هر رأس در L حداقل ۲ است و لذا L شامل یک دور است و در نتیجه T نیز دور دارد. در صورتی که T درخت است و دور ندارد. تناقض حاصل نشان می‌دهد زیر گراف H مورد نظر منحصر بفرد است.

۲۲) چون هر یال درخت یک یال برشی است، در نتیجه $T - e$ گرافی ناهمبند و بنا به قضیهٔ ۱۴ شامل دو مؤلفهٔ همبندی است. فرض کنید $V_۱$ و $V_۲$ مجموعهٔ رأسهای این دو مؤلفهٔ همبندی باشند. فرض کنید $e = xy$ و مثلاً $x \in V_۱$ و $y \in V_۲$ باشد و

$$P : x = u_۰, u_۱, \ldots, u_{k-۱}, u_k = y$$

یکتا مسیر بین x و y در T' باشد. چون $e \notin E(T')$ لذا e در P ظاهر نشده است. همچنین چون $x \in V_۱$ و $y \in V_۲$ و $\{V_۱, V_۲\}$ افرازی از $V(G)$ به دو زیر مجموعهٔ ناتهی است، لذا اندیس i موجود است که $u_i \in V_۱$ و $u_{i+۱} \in V_۲$. (کافی است i را بزرگترین اندیسی بگیریم که $u_i \in V_۱$) فرض کنید $e' = u_i u_{i+۱}$، در این صورت $e' \in E(T')$. همچنین چون e' یالی بین $V_۱$ و $V_۲$ است، در نتیجه $e' \notin E(T)$. اکنون همانند استدلال قضیه‌های ۲۴ و ۲۵ واضح است که $T' + e - e'$ و $T - e + e'$، هر دو زیر درختی فراگیر از G هستند.

۲۳) فرض کنید G گرافی n رأسی باشد. چون G همبند است حداقل $n - ۱$ یال دارد. با استقراء روی تعداد یالهای G حکم را ثابت می‌کنیم. اگر $q(G) = n - ۱$، در این صورت G یک درخت است و

لذا $T = G$. قرار می‌دهیم $H = G$ و حکم واضح است. فرض کنید حکم برای همهٔ گرافهای همبند n رأسی با کمتر از q یال درست باشد و G گرافی همبند با n رأس و q یال و T زیر درختی فراگیر از G باشد. $(q \geq n)$ چون $q \geq n$، لذا G دور دارد. فرض کنید C دوری از G و e یالی از C باشد که متعلق به T نیست. در این صورت T یک زیر درخت فراگیر از $G - e$ نیز هست. چون $q(G-e) = q - ۱$، لذا بنا بر فرض استقراء T زیر گرافی فراگیر مانند H' دارد که برای هر رأس v از G، $\deg_{H'} v \overset{۲}{\equiv} \deg_{G-e} v$. فرض کنید $e = xy$ و

$$P : x = u_۰, u_۱, \ldots, u_{k-۱}, u_k = y$$

یکتا مسیر بین x و y در T باشد. حال زیر گراف فراگیر H از G را به این صورت تعریف می‌کنیم.

$$E(H) = E(H')\Delta E(P) = (E(H') - E(P)) \cup (E(P) - E(H'))$$

در این صورت زوجیت درجهٔ هر رأس در H و H' به غیر از x و y یکسان است. در نتیجه برای هر رأس v غیر از x و y

$$\deg_H v \overset{۲}{\equiv} \deg_{H'} v \overset{۲}{\equiv} \deg_{G-e} v = \deg_G v$$

همچنین اگر w یکی از x و y باشد، آنگاه

$$\deg_H w \overset{۲}{\not\equiv} \deg_{H'} w \overset{۲}{\equiv} \deg_{G-e} w = \deg_G w - ۱$$

و لذا $\deg_H w \overset{۲}{\equiv} \deg_G w$ و حکم ثابت می‌شود.

۲۴) اگر F جنگل باشد، دور ندارد و لذا هر زیر گراف القایی آن مانند H نیز دور ندارد و لذا H نیز یک جنگل است. در نتیجه H رأسی با درجهٔ حداکثر ۱ دارد. بر عکس اگر F جنگل نباشد، دور دارد و لذا درجهٔ هر رأس در زیر گراف القایی روی رأسهای یک دور از F حداقل ۲ است.

۲۵) فرض کنید F یک جنگل و H یک زیر گراف همبند F و G زیر گراف القایی F روی رأسهای H باشد. در این صورت H زیر گرافی فراگیر از G است. چون F دور ندارد، لذا G و H نیز دور ندارند. از طرفی چون H همبند است لذا G نیز همبند است و لذا G و H هر دو درخت هستند. در نتیجه $G = H$ و لذا H یک زیر گراف القایی F است. برعکس اگر F جنگل نباشد دوری مانند C دارد. اگر e یالی از C باشد، در این صورت $C - e$ زیرگرافی همبند از F است که القایی نیست.

۲۶) فرض کنید t و t' دو زیر درخت فراگیر از G باشند و $r = |E(t) - E(t')|$. با استقراء روی r ثابت می کنیم مسیری به طول حداکثر r بین t و t' در G' موجود است. اگر $r = ۰$، آنگاه $t = t'$ و لذا مسیری به طول صفر بین آنها در G' موجود است. اگر $r = ۱$ در این صورت t و t' دقیقاً در $n - ۲$ یال مشترکند و لذا طبق تعریف، t و t' در G' مجاورند و لذا مسیری به طول ۱ بین آنها در G' موجود است. فرض کنید حکم برای $r - ۱$ درست باشد و t و t' دو زیر درخت فراگیر از G باشند به گونه‌ای که $|E(t) - E(t')| = r > ۱$. فرض کنید $e \in E(t) - E(t')$، بنا به قضیهٔ ۲۴، $e' \in E(t') - E(t)$ موجود است که $t - e + e'$ زیر

درختی فراگیر از G است. اگر $t'' = t - e + e'$، در این صورت t و t'' در $n - ۲$ یال مشترکند و همچنین $|E(t'') - E(t')| = r - ۱$. لذا بنا به فرض استقراء مسیری به طول حداکثر $r - ۱$ بین t' و t'' در G' موجود است و چون t و t'' در G' مجاورند در نتیجه مسیری به طول حداکثر r بین t و t' در G' موجود است. در نتیجه G' همبند است.
همچنین اگر

$$P : t = t_۰, t_۱, \ldots, t_{k-۱}, t_k = t'$$

مسیری بین t و t' در G' باشد، در این صورت برای $e \in E(t) - E(t')$، i را بزرگترین اندیسی می‌گیریم که $e \in E(t_i)$ و لذا $e \notin E(t_{i+۱})$. در نتیجه $e \in E(t_i) - E(t_{i+۱})$ و لذا

$$E(t) - E(t') \subset \bigcup_{i=۰}^{k-۱} (E(t_i) - E(t_{i+۱}))$$

در نتیجه

$$r = |E(t) - E(t')| \leq |\bigcup_{i=۰}^{k-۱} (E(t_i) - E(t_{i+۱}))|$$

$$\leq \sum_{i=۰}^{k-۱} |E(t_i) - E(t_{i+۱})| = \sum_{i=۰}^{k-۱} ۱ = k$$

در نتیجه طول هر مسیر بین t و t' در G' حداقل r است که با توجه به مطلب بند قبل نتیجه می‌شود

$$d_{G'}(t, t') = r.$$

۲۷) فرض کنید T یک درخت باشد که بیش از یک مرکز دارد. همچنین u و v دو مرکز T باشند، در این صورت $\epsilon(u) = \epsilon(v) = \rho(T)$. فرض کنید

$$P : u = x_0, x_1, \ldots, x_k, \quad Q : v = y_0, y_1, \ldots, y_k$$

مسیرهایی به طول $k = \rho(T)$ در T باشند. اکنون دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اول. P و Q حداکثر یک رأس مشترک دارند. در این حالت فرض کنید $n = d(x_r, y_s)$ کوچکترین عدد در میان اعداد $d(x_i, y_i)$، $i, j = 0, 1, \ldots, k$، و

$$R : x_r = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = y_s$$

مسیری به طول n بین x_r و y_s در T باشد. در این صورت هیچ یک از رأسهای R به غیر از x_r و y_s در P یا Q نیستند. همچنین اگر P و Q رأس مشترک داشته باشند، $x_r = y_s$ تنها رأس مشترک آنها است. حال اگر $r \le s$، در این صورت

$$u = x_0, x_1, \ldots, x_r = z_0, z_1, \ldots, z_n = y_s, y_{s+1}, \ldots, y_k$$

مسیری به طول $r + n + k - s$ است. اما $\epsilon(u) = k$ و $r + n + k - s \ge k$، لذا طول این مسیر برابر k است و در نتیجه $n = 0$ و $r = s$. در نتیجه $x_r = y_s$. حال اگر $w = x_r = y_s$ و

$$U : w = w_0, w_1, \ldots, w_k$$

مسیری به طول k در T باشد، در این صورت چون T دور ندارد، حداقل یکی از P و Q فقط در رأس w با U مشترک هستند. مثلاً فرض کنید P و U فقط در رأس w مشترک هستند. در این صورت

$$u = x_۰, x_۱, \ldots, x_r = w = w_۰, w_۱, \ldots, w_k$$

مسیری به طول بزرگتر از k است که از u از آغاز شده است و این با $\epsilon(u) = k$ در تناقض است.

حالت دوم. P و Q حداقل در دو رأس مشترک هستند. در این حالت فرض کنید r و s به ترتیب کوچکترین اندیس و بزرگترین اندیس باشند که x_r و x_s در Q هستند. مثلاً فرض کنید $x_r = y_p$ و $x_s = y_q$. اکنون نیز دو حالت زیر را داریم.

(i) $p > q$. چون بین x_r و x_s مسیری منحصر بفرد در T وجود دارد، در نتیجه

$$x_r = y_p, x_{r+۱} = y_{p-۱}, \ldots, x_{s-۱} = y_{q+۱}, x_s = y_q.$$

اگر $r > ۰$ و

$$R : x_r = y_p = z_۰, z_۱, \ldots, z_k$$

مسیری به طول k باشد، در این صورت چون T دور ندارد حداقل یکی از دو مسیر زیر رأس مشترکی با R ندارند.

$$u = x_۰, x_۱, \ldots, x_{r-۱}, \qquad v = y_۰, y_۱, \ldots, y_{p-۱}$$

در نتیجه حداقل یکی از دو دنبالهٔ زیر مسیری به طول بزرگتر از k است.

$$u = x_۰, x_۱, \ldots, x_{r-۱}, x_r = z_۰, z_۱, \ldots, z_k$$

$$v = y_0, y_1, \ldots, y_{p-1}, y_p = z_0, z_1, \ldots, z_k$$

و این با $\epsilon(u) = \epsilon(v) = k$ در تناقض است. در نتیجه $r = 0$.
استدلال مشابه نشان می‌دهد که $q = 0$. در نتیجه $y_p = x_0 = u$ و $v = y_0 = x_s$. حال اگر $s > 1$ و

$$U : x_1 = w_0, w_1, \ldots, w_k$$

مسیری به طول k باشد، در این صورت چون T دور ندارد، U شامل x_0 نیست و یا رأس مشترکی با مسیر

$$v = x_s, x_{s-1}, \ldots, x_2$$

ندارد. در نتیجه حداقل یکی از دو دنبالهٔ زیر مسیری به طول بزرگتر از k است.

$$u = x_0, x_1 = w_0, w_1, \ldots, w_k$$

$$v = x_s, x_{s-1}, \ldots, x_2, x_1 = w_0, w_1, \ldots, w_k$$

و این با $\epsilon(u) = \epsilon(v) = k$ در تناقض است. در نتیجه $s = 1$ و لذا $v = x_1$ و لذا u و v مجاورند.

(ii) $p < q$. چون بین x_r و x_s مسیری منحصر بفرد در T موجود است، در نتیجه

$$x_r = y_p, x_{r+1} = y_{p+1}, \ldots, x_s = y_q$$

و لذا $s-r=q-p$. اگر $r>p$، آنگاه $q>s$ و لذا

$$u=x_{\circ},x_{1},\ldots,x_{s}=y_{q},y_{q+1},\ldots,y_{k}$$

مسیری به طول $s+k-q$ است که از k بزرگتر است و این با $\epsilon(u)=k$ در تناقض است. با همین استدلال نتیجه می‌گیریم رابطهٔ $r<p$ درست نیست. لذا $r=p$ است. چون u و v متمایزند لذا $r>\circ$ است. حال با در نظر گرفتن مسیری به طول k که از x_r شروع می‌شود همانند استدلال حالت قبل به تناقض می‌رسیم.

با توجه به مطالب فوق نتیجه می گیریم که فقط قسمت (i) از حالت دوّم ممکن است اتفاق بیافتد و در این حالت u و v مجاورند. در نتیجه هر دو مرکز از T مجاورند. حال چون T دور ندارد در نتیجه T بیش از دو مرکز نمی‌تواند داشته باشد. در نتیجه T دقیقاً یک مرکز و یا دو مرکز مجاور دارد.

۲۸) فرض کنید $\epsilon(x)=k$ و

$$P:x=x_{\circ},x_{1},\ldots,x_{k}$$

مسیری به طول k در T باشد. چون T درخت و دو رأس y و z مجاور x هستند، در نتیجه P شامل حداکثر یکی از y و z است. اگر P شامل y باشد، چون y مجاور x است در نتیجه $y=x_{1}$. همچنین P شامل z نیست و لذا

$$y=x_{1},x_{2},\ldots,x_{k};\qquad z,x_{\circ},x_{1},\ldots,x_{k}$$

به ترتیب مسیرهایی به طول $k-۱$ و $k+۱$ در T هستند و لذا $\epsilon(y) \geq k-۱$ و $\epsilon(z) \geq k+۱$ و در نتیجه

$$\epsilon(y)+\epsilon(z) \geq ۲k = ۲\epsilon(x)$$

به همین ترتیب اگر P شامل z باشد حکم ثابت می‌شود. اگر P شامل هیچ یک از y و z نباشد در این صورت

$$y, x_۰, x_۱, \ldots, x_k; \qquad z, x_۰, x_۱, \ldots, x_k$$

مسیرهایی به طول $k+۱$ در T هستند و لذا

$$\epsilon(y)+\epsilon(z) \geq k+۱+k+۱ > ۲\epsilon(x).$$

۲۹) الف) فرض کنید u و v دو رأس از G باشند که $d(u,v) = diam(G)$. اگر w مرکز G باشد، آنگاه $\epsilon(w) = \rho(G)$ و لذا بنا به مسألهٔ ۱۱ از فصل ۴

$$diam(G) = d(u,v) \leq d(u,w)+d(w,v) \leq \epsilon(w)+\epsilon(w) = ۲\rho(G).$$

ب) فرض کنید $diam(T) = ۲\rho(T)$ و u و v دو رأس از T باشند که $d(u,v) = diam(T) = k$ و

$$P : u = x_۰, x_۱, \ldots, x_{k-۱}, x_k = v$$

مسیری به طول k بین u و v در T باشد. همچنین w مرکز T و x_r نزدیکترین رأس P به w باشد، یعنی $d(w,x_r)$ کوچکترین

عدد در میان اعداد $d(w,x_i)$، $k,\dots,۱,۰=i$، باشد. فرض کنید $n=d(w,x_r)$ و

$$Q: w=z_۰, z_۱, \dots, z_{n-۱}, z_n=x_r$$

مسیری به طول n بین w و x_r در T باشد. در این صورت طبق تعریف x_r، Q و P تنها در رأس x_r مشترک هستند. در نتیجه

$$R: w=z_۰, z_۱, \dots, z_{n-۱}, z_n=x_r, x_{r+۱}, \dots, x_k=v$$

$$S: w=z_۰, z_۱, \dots, z_{n-۱}, z_n=x_r, x_{r-۱}, \dots, x_۰=u$$

به ترتیب مسیرهایی به طول $n+k-r$ و $n+r$ در T هستند. حال با توجه به اینکه $\epsilon(w)=\rho(T)$، نتیجه می‌گیریم

$$n+r\le\rho(T), n+k-r\le\rho(T)$$

$$\Longrightarrow ۲n+k\le ۲\rho(T)=diam(T)=k$$

لذا $n=۰$ و $r=\rho(T)=\frac{k}{۲}$. در نتیجه $w=x_{\frac{k}{۲}}$. یعنی T دقیقاً یک مرکز مشخص دارد. برعکس اگر $k=diam(T)<۲\rho(T)$ و u، v، و P همانند قسمت قبل باشند و $s=\lfloor\frac{k}{۲}\rfloor$ و $t=\epsilon(x_s)$ و

$$U: x_s=y_۰, y_۱, \dots, y_t$$

مسیری به طول t در T باشد، در این صورت چون T دور ندارد حداقل یکی از دو مسیر زیر رأس مشترکی با U ندارند.

$$u=x_۰, x_۱, \dots, x_{s-۱}; \qquad v=x_k, x_{k-۱}, \dots, x_{s+۱}$$

در نتیجه حداقل یکی از دو دنبالهٔ زیر مسیر است.

$$P_1 : u = x_0, x_1, \ldots, x_{s-1}, x_s = y_0, y_1, \ldots, y_t$$

$$P_2 : v = x_k, x_{k-1}, \ldots, x_{s+1}, x_s = y_0, y_1, \ldots, y_t$$

امّا طول P_2 برابر $k - s + t$ است و با توجه به اینکه $t = \epsilon(x_s) \geq \rho(T) > \frac{k}{2}$ نتیجه می‌گیریم

$$k - s + t = k - \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + t > k$$

که این با $diam(T) = k$ در تناقض است. در نتیجه P_2 مسیر نیست و لذا P_1 مسیر است و طول آن برابر است با $s + t$. و چون $t > \frac{k}{2}$، در نتیجه

$$s + t = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor + t \geq \frac{k-1}{2} + \frac{k+1}{2} = k$$

و چون $diam(T) = k$، نتیجه می‌گیریم که $t = \frac{k+1}{2}$ است. حال از رابطهٔ $\frac{k}{2} < \rho(T) \leq \epsilon(x_s) = t = \frac{k+1}{2}$ نتیجه می‌شود $\epsilon(x_s) = \rho(T)$ و لذا $x_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ یک مرکز T است. همچنین از رابطهٔ $t = \frac{k+1}{2}$ نتیجه می‌شود k فرد است و لذا $\lceil \frac{k}{2} \rceil \neq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. چنانچه استدلال فوق را به جای $s = \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ برای $s = \lceil \frac{k}{2} \rceil$ تکرار کنیم نتیجه می‌شود $x_{\lceil \frac{k}{2} \rceil}$ نیز یک مرکز T است و لذا T دو مرکز دارد.

تبصره. از اثبات این مسأله نتیجه می‌شود که اگر

$$P : x_0, x_1, \ldots, x_k$$

بلندترین مسیر در درخت T باشد، به‌ازای k زوج، $x_{\frac{k}{2}}$ و به‌ازای k فرد، $x_{\frac{k-1}{2}}$ و $x_{\frac{k+1}{2}}$ مرکزهای T هستند.

۳۰) الف) چون G درخت و $\deg x > 1$ است، در نتیجه بنا به قضیهٔ ۲۷، $G-x$ ناهمبند است. همچنین چون y و z دو همسایهٔ x هستند، لذا y, x, z یکتا مسیر بین y و z در G است و در نتیجه y و z در دو مؤلفهٔ همبندی متمایز $G-x$ قرار دارند. فرض کنید G_1، مؤلفهٔ همبندی شامل y شامل k_1 رأس و G_2، مؤلفهٔ همبندی شامل z شامل k_2 رأس باشد. در این صورت $k_1 + k_2 \leq n - 1$. برای هر رأس v از G_1، $d(x,v) = d(y,v) + 1$ و برای هر رأس v خارج G_1، $d(x,v) = d(y,v) - 1$ است. در نتیجه

$$s(x) = s(y) + k_1 - (n - k_1) = s(y) + 2k_1 - n$$

به همین ترتیب

$$s(x) = s(z) + 2k_2 - n$$

در نتیجه

$$2s(x) = s(y) + s(z) + 2(k_1 + k_2) - 2n \leq s(y) + s(z) - 2.$$

ب) فرض کنید u و v دو رأس غیر مجاور در G باشند به گونه‌ای $s(u) = s(v) = \min_{x \in V} s(x)$. همچنین

$$P: u = x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k = v$$

یکتا مسیر بین u و v در G باشد. چون u و v غیر مجاورند، در نتیجه $k \geq 2$. حال x_0 و x_2 دو رأس مجاور x_1 هستند و لذا بنا به

قسمت الف، $2s(x_1) < s(x_0) + s(x_2)$. از طرفی طبق تعریف x_0، $s(x_1) \geq s(x_0)$ و لذا

$$s(x_0) + s(x_1) \leq 2s(x_1) < s(x_0) + s(x_2)$$

و لذا $s(x_0) \leq s(x_1) < s(x_2)$. چنانچه همین استدلال را تکرار کنیم، نتیجه می‌شود

$$s(u) = s(x_0) \leq s(x_1) < s(x_2) < \cdots < s(x_{k-1}) < s(x_k) = s(v)$$

که با $s(u) = s(v)$ در تناقض است. تناقض حاصل نشان می‌دهد که چنانچه $s(x)$ کمترین مقدار خود را در دو رأس بگیرد، این دو رأس حتماً مجاورند. چون G دور ندارد لذا $s(x)$ نمی‌تواند کمترین مقدار خود را در سه رأس بگیرد. لذا $s(x)$ کمترین مقدار خود را در یک رأس و یا دو رأس مجاور می‌گیرد.

۳۱) با استقراء روی n ثابت می‌کنیم

$$(n-1)^2 \leq W(T) \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}$$

حکم برای $n = 1, 2$ واضح است. فرض کنید حکم برای درختهای $n-1$ رأسی درست باشد. $(n \geq 3)$ و T درختی n رأسی و u برگی از T باشد. در این صورت $T - u$ درختی $n-1$ رأسی است. بنا به فرض استقراء

$$(n-2)^2 \leq W(T-u) \leq \sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{2}$$

همچنین واضح است که

$$W(T) = W(T-u) + \sum_{x \in V(T)} d(u,x)$$

بنا به قضیهٔ ۳۰، $\sum_{x\in V(T)} d(u,x) \le \binom{n}{2}$. همچنین چون u برگی از T است، لذا $\sum_{x\in V(T)} d(u,x) \ge 1 + 2(n-2)$. در نتیجه

$$(n-1)^2 = (n-2)^2 + 1 + 2(n-2) \le W(T) \le \sum_{k=2}^{n-1} \binom{k}{2} + \binom{n}{2}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}$$

و حکم ثابت می‌شود. همچنین با توجه به اثبات مشخص است که $W(T) = \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2}$ اگر و تنها اگر T با مسیر n رأسی P_n یکریخت باشد و $W(T) = (n-1)^2$ اگر و تنها اگر T با $K_{1,n-1}$ یکریخت باشد.

۳۲) با استقراء روی k حکم را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $k = 1, 2$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $k-1$ درست باشد $(k \ge 3)$ و $G_1, G_2, \ldots, G_k$ زیر درختهایی از درخت G باشند به‌گونه‌ای هر دو تا حداقل در یک رأس مشترکند. بنا به فرض استقراء، $G_1, G_2, \ldots, G_{k-1}$ در رأسی مانند u و $G_2, G_3, \ldots, G_k$ در رأسی مانند v مشترکند. اگر $u = v$ که حکم ثابت است، در غیر این صورت فرض کنید w رأس مشترک G_1 و G_k و

$$P : u = x_0, x_1, \ldots, x_{t-1}, x_t = v$$

یکتا مسیر بین u و v در G باشد. چون u و v رأسهای $G_2, \ldots, G_{k-1}$ و $G_2, \ldots, G_{k-1}$ زیر درختهایی از درخت G هستند لذا $G_2, \ldots, G_{k-1}$ شامل همهٔ رأسهای P هستند. فرض کنید x_r نزدیکترین رأس P به w باشد، یعنی $d(w, x_r) = \min_{0 \le i \le t} d(w, x_i)$. همچنین

$$Q : x_r = z_0, z_1, \ldots, z_{s-1}, z_s = w$$

یکتا مسیر بین x_r و w در G باشد. طبق تعریف x_r، P و Q هیچ رأس مشترکی غیر از x_r ندارند و لذا

$$R : u = x_0, x_1, \ldots, x_r = z_0, z_1, \ldots, z_s = w$$

$$S : v = x_t, x_{t-1}, \ldots, x_r = z_0, z_1, \ldots, z_s = w$$

مسیرهایی در G هستند. چون u و w رأسهایی از G_1 هستند و G_1 زیر درختی از درخت G است، در نتیجه G_1 شامل همهٔ رأسهای R علی الخصوص x_r است. به همین ترتیب G_k نیز شامل رأس x_r است. در نتیجه x_r رأس مشترک همهٔ G_i ها است.

۳۳) فرض کنید $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ و به‌ازای هر $1 \le i \le n$، اندیسهای p_i و q_i موجود باشند که $A_{p_i} \cup \{x_i\} = A_{q_i} \cup \{x_i\}$. حال گراف G را با مجموعهٔ رأسهای $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ به این صورت می‌سازیم که دو رأس A_p و A_q را با یال شمارهٔ i به یکدیگر متصل می‌کنیم، هر گاه $A_p \cup \{x_i\} = A_q \cup \{x_i\}$ باشد. طبق فرض، G از هر شمارهٔ $1, 2, \ldots, n$ حداقل یک یال دارد. فرض کنید G' زیر گرافی از G باشد که از هر شمارهٔ $1, 2, \ldots, n$ دقیقاً یک یال داشته باشد. در

این صورت G' گرافی با n رأس و n یال است و لذا طبق نتیجهٔ قضیهٔ ۱۸، G' دور دارد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید

$$C : A_۱, A_۲, \ldots, A_k, A_۱$$

دوری در G' و شمارهٔ یال $A_iA_{i+۱}$ برابر i، $i = ۱, ۲, \ldots, k - ۱$، و شمارهٔ یال $A_kA_۱$ برابر k باشد. در این صورت $A_۱ \cup \{x_۱\} = A_۲ \cup \{x_۱\}$ و چون $A_۱ \neq A_۲$، در نتیجه $x_۱$ دقیقاً متعلق به یکی از $A_۱$ و $A_۲$ است. مثلاً $x_۱ \notin A_۱$ و $x_۱ \in A_۲$. چون $A_۲ \cup \{x_۲\} = A_۳ \cup \{x_۲\}$ و $x_۱ \neq x_۲$ و $x_۱ \in A_۲$، لذا $x_۱ \in A_۳$. چنانچه این استدلال را ادامه دهیم، نتیجه می‌شود $x_۱ \in A_k$. همچنین از $A_k \cup \{x_k\} = A_۱ \cup \{x_k\}$ و $x_۱ \neq x_k$ و $x_۱ \in A_k$، نتیجه می‌شود $x_۱ \in A_۱$ که با $x_۱ \notin A_۱$ در تناقض است. تناقض حاصل حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳۴) فرض کنید H_i گرافی با مجموعهٔ رأسهای $\{V_۱, V_۲, \ldots, V_n\}$ باشد به گونه‌ای که V_p و V_q در H_i مجاورند هر گاه یالی از T_i موجود باشد که یک سر آن در V_p و سر دیگر آن در V_q باشد. چون T_i همبند است، H_i نیز همبند است و لذا H_i حداقل $n - ۱$ یال دارد. در نتیجه T_i حداقل $n - ۱$ یال دارد که دو سر آنها متعلق به دو قسمت متفاوت است، $i = ۱, ۲, \ldots, k$. چون T_i ها دو بدو در هیچ یالی مشترک نیستند، لذا حداقل $k(n - ۱)$ یال از G وجود دارد که دو سر آنها متعلق به قسمتهای متفاوت است.

۳۵) فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ باشد به گونه‌ای که دو رأس v_i و v_j با یال شمارهٔ t به یکدیگر متصلند هر گاه

با حذف ستون t ام جدول، سطرهای i ام و j ام برابر شوند. حال اگر حکم مسأله برقرار نباشد، G از هر شمارهٔ $۱, ۲, \ldots, n$ حداقل یک یال دارد. فرض کنید G' زیر گرافی از G باشد که از هر شمارهٔ $۱, ۲, \ldots, n$ دقیقاً یک یال داشته باشد، در این صورت G' گرافی با n رأس و n یال است و لذا بنا به نتیجهٔ قضیهٔ ۱۸، G' دور دارد. بدون از دست دادن کلیت فرض کنید

$$C : v_۱, v_۲, \ldots, v_k, v_۱$$

دوری در G' و شمارهٔ یال $v_i v_{i+۱}$ برابر i، $i = ۱, ۲, \ldots, k - ۱$ و شمارهٔ یال $v_k v_۱$ برابر k باشد. در این صورت سطر اوّل و دوّم جدول فقط در مؤلفهٔ اوّل اختلاف دارند. همچنین سطر دوّم و سوّم فقط در مؤلفهٔ دوّم اختلاف دارند و لذا مؤلفهٔ اوّل آنها برابر است. اگر این استدلال را ادامه دهیم نتیجه می‌شود که مؤلفهٔ اوّل سطرهای دوّم و kام برابرند و لذا مؤلفهٔ اوّل سطرهای اوّل و k ام برابر نیستند. اما شمارهٔ یال $v_k v_۱$ برابر k است و لذا سطرهای اوّل و k ام فقط در مؤلفهٔ kام اختلاف دارند و این با نتیجهٔ قبلی در تناقض است. تناقض حاصل حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۳۶) هر گاه G همبند باشد، بنا به مسألهٔ ۴ حداقل دوتا از H_i ها همبند هستند. برعکس فرض کنید $H_۱$ و $H_۲$ همبند باشند. چون $H_۲$ همبند و $n \geq ۳$ است لذا اندیس $۳ \leq i \leq n$ موجود است که $v_۱$ و v_i مجاورند. حال چون $H_۱$ همبند است و $v_۱$ حداقل به یکی از رأسهای $H_۱$ متصل است نتیجه می‌شود که G نیز همبند است.

۳۷) فرض کنید $e = xy$ یک یال برشی G باشد، در این صورت $G - e$ دو مؤلفهٔ همبندی دارد. فرض کنید $V_۱$ و $V_۲$ مجموعهٔ رأسهای دو مؤلفهٔ همبندی $G - e$ باشند. چون G حداقل ۳ رأس دارد لذا حداقل یکی از $V_۱$ و $V_۲$ بیش از یک رأس دارند. مثلاً فرض کنید $|V_۱| \geq ۲$ و $x \in V_۱$. در این صورت $G - x$ ناهمبند است زیرا $V_۱ - \{x\}$ و $V_۲$ افرازی از $V(G - x)$ به دو زیر مجموعهٔ ناتهی هستند که بین آنها هیچ یالی در $G - x$ موجود نیست.

۵.۱۰ حل مسایل فصل ششم

۱) رأس x را به G اضافه می‌کنیم و آن را به تمام رأسهای فرد G وصل می‌کنیم و گراف حاصل را G' می‌نامیم. در این صورت G' گرافی اولری است و لذا تور اولری مانند

$$x_0, x_1, \ldots, x_t, x_0$$

دارد. چون درجهٔ رأس x برابر $2k$ است، لذا x، k بار در این تور اولری ظاهر شده است. با حذف رأس x از این تور اولری، k گذر باقی می‌ماند که یالهای G را افراز می‌کنند.

۲) بله. به عنوان مثال در دور ۶ رأسی $v_1, v_2, \ldots, v_6$، سه رأس v_2, v_4, v_6 را دوبدو به یکدیگر وصل کنید.

۳) ابتدا مسأله را در حالتی حل می‌کنیم که گراف G اولری باشد. اگر درجهٔ تمام رأسهای G برابر ۲ باشد، G یک دور است و با توجه به فرض قضیه، یک دور زوج است. در این حالت یالهای گراف را یک در میان آبی و قرمز می‌کنیم و واضح است رنگ‌آمیزی مورد نظر به‌دست می‌آید. اگر G رأسی داشته باشد که درجهٔ آن حداقل ۴ باشد، توری اولری از G را در نظر می‌گیریم که از این رأس شروع می‌شود. حال یالهای این تور اولری را به‌طور متناوب آبی و قرمز

می‌کنیم و واضح است رنگ‌آمیزی مورد نظر به‌دست می‌آید. اگر G اولری نباشد، یک رأس جدید به‌نام v به G اضافه می‌کنیم و آن را به تمام رأسهای فرد G وصل می‌کنیم و گراف حاصل را G' می‌نامیم. حال G' یک گراف اولری است و لذا تور اولری دارد. توری اولری از G' در نظر می‌گیریم که از رأس v شروع می‌شود و یالهای این تور اولری را به‌طور متناوب آبی و قرمز می‌کنیم. لذا یک رنگ‌آمیزی یالهای G به‌دست می‌آید که خواص مورد نظر را دارد.

۴) با استقراء روی تعداد یالهای G حکم را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $q(G) = 0$ که حکم واضح است. فرض کنید حکم برای تمام گرافهای G با $q(G) < n$ درست باشد و G گرافی شامل n یال باشد که درجهٔ هر رأس آن زوج است. چون G رأس درجهٔ ۱ ندارد لذا بنا به قضیهٔ ۹، G دور دارد. فرض کنید C_1 یک دور در G باشد، در این صورت $G - E(C_1)$ گرافی است با کمتر از n یال که درجهٔ هر رأس آن زوج است و لذا طبق فرض استقراء دورهای مجزای یالی $C_2, C_3, \ldots, C_m$ وجود دارند که یالهای $G - E(C_1)$ را افراز می‌کنند. اکنون $C_1, C_2, \ldots, C_m$ دورهای مجزای یالی هستند که یالهای G را افراز می‌کنند. لذا حکم مسأله به استقراء نتیجه می‌شود.

۵) فرض کنید C دوری از G باشد که شامل رأس v نیست. چون G گرافی اولری است لذا درجهٔ همهٔ رأسهای آن زوج است و لذا درجهٔ همهٔ رأسهای $G - E(C)$ نیز زوج است. پس مؤلفهٔ همبندی $G - E(C)$ که شامل رأس v است اولری است. فرض کنید P یک تور اولری این مؤلفهٔ همبندی باشد که از رأس v شروع می‌شود. در این صورت P گذری است که از v شروع می‌شود و آن را به هیچ تور

اولری برای G نمی‌توان گسترش داد و لذا G اولری اتفاقی از رأس v نیست. بر عکس اگر تمام دورهای G شامل v باشند و P گذری در G باشد که از v شروع می‌شود، در این صورت P را به یک گذر Q گسترش می‌دهیم که Q گذری غیر قابل گسترش در G باشد. در این صورت چون هر رأس G زوج است Q باید به v ختم شود. حال اگر Q یک تور اولری G نباشد، با توجه به اینکه درجهٔ هر رأس $G - E(Q)$ زوج است، از مسألهٔ قبل نتیجه می‌شود که $G - E(Q)$ دوری مانند C دارد. طبق فرض C شامل رأس v است و لذا چون Q به v ختم می‌شود گذر Q را می‌توان به گذر QC گسترش داد که با تعریف Q در تناقض است. در نتیجه Q یک تور اولری است و لذا گذر P را می‌توان به یک تور اولری گسترش داد. در نتیجه G اولری اتفاقی از رأس v است.

۶) چون گراف G اولری است، بنا به مسألهٔ ۴ دورهای مجزای یالی $C_۱, C_۲, \ldots, C_m$ وجود دارند که یالهای G را افراز می‌کنند. حال اگر رأس u متعلق به j دور از این دورها باشد، در این صورت $\deg u = ۲j$. علی الخصوص بنا به مسألهٔ قبل رأس v متعلق به همهٔ این دورها است و لذا $\deg v = ۲m$. در نتیجه برای هر رأس u، $\deg u \leq \deg v$ و لذا $\deg v = \Delta$.

۷) اگر G اولری اتفاقی از سه رأس u، v، و w باشد، در این صورت همهٔ دورهای G شامل این سه رأس هستند. حال اگر $C_۱$ و $C_۲$ دو دور متمایز در G باشد، در این صورت به‌ازای دو رأس از این سه رأس، مثلاً u و v، مسیر بین u و v در $C_۱$ که شامل w نیست و مسیر بین u و v در $C_۲$ که شامل w نیست یکسان نیستند. حال اجتماع این

دو مسیر شامل دوری است که w رأسی از این دور نیست. و این با نتیجه قبلی در تناقض است. در نتیجه G دو دور متمایز ندارد و لذا حداکثر یک دور دارد و چون G اولری است، در نتیجه G یک دور است و لذا G اولری اتفاقی از همهٔ رأسهای خود می‌باشد و در نتیجه $r = p(G)$.

۸) اگر دور $C_۱$ در G موجود باشد که u رأسی از آن نباشد، در این صورت چون درجهٔ همهٔ رأسهای $G - E(C_۱)$ زوج است لذا بنا به مسألهٔ ۴، یالهای این گراف را می‌توان به دورهای مجزای یالی $C_۲, C_۳, \ldots, C_m$ افراز کرد. لذا $C_۱, C_۲, \ldots, C_m$ دورهای مجزای یالی هستند که یالهای G را افراز می‌کنند. چون G اولری اتفاقی از رأس v است، لذا v رأسی از همهٔ این دورها است و لذا $\deg v = ۲m$. اما u رأسی از $C_۱$ نیست و لذا $\deg u \leq ۲(m - ۱)$ که با $\deg u = \deg v$ در تناقض است. لذا دور $C_۱$ موجود نیست و در نتیجه همهٔ دورهای G شامل رأس u هستند و در نتیجه G اولری اتفاقی از رأس u است.

۹) فرض کنید

$$C : v_۱, v_۲, \ldots, v_n, v_۱$$

یک دور هامیلتونی در G باشد و $v_۱ \in A$، در این صورت چون G دو بخشی است، $v_{۲i} \in B$ و $v_{۲i-۱} \in A$. همچنین $v_n \in B$ و لذا n زوج است. چون C شامل همهٔ رأسهای G است، در نتیجه $|A| = |B| = \frac{n}{۲}$.

۱۰) فرض کنید $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ و $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ بخشهای $K_{n,n}$ باشند. هر دور هامیلتونی C را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت.

$$C : x_1, x_2, \ldots, x_{2n}, x_1$$

که $x_1 = v_1$ و $x_{2i-1} \in A$ و $x_{2i} \in B$. حال برای x_2، n انتخاب، برای x_3، $n-1$ انتخاب، برای x_4، $n-1$ انتخاب، ...، و برای x_{2n} یک انتخاب وجود دارد. لذا به

$$n(n-1)(n-1)(n-2)(n-2)\cdots \times 1 \times 1 = n!(n-1)!$$

طریق می‌توان دور هامیلتونی C را ساخت. اما چون دور هامیلتونی C در فوق با دور هامیلتونی

$$C' : x_1, x_{2n}, x_{2n-1}, \ldots, x_2, x_1$$

یکسان است لذا در شمارش فوق هر دور هامیلتونی دوبار شمارش شده است و لذا تعداد دورهای هامیلتونی $K_{n,n}$ برابر $\frac{n!(n-1)!}{2}$ است.

۱۱) با استقراء روی k حکم را ثابت می‌کنیم. برای $k = 2$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $k-1$ درست باشد. A را مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های k تایی از ۰ و ۱ می‌گیریم که به ۰ ختم می‌شوند و B را مجموعهٔ همهٔ دنباله‌های k تایی از ۰ و ۱ می‌گیریم که به ۱ ختم می‌شوند. در این صورت زیر گرافهای القایی kـمکعب روی A و B با $k-1$ـمکعب یکریخت هستند. چنانچه این زیر گرافها را G_1 و G_2 بنامیم، بنا به فرض استقراء G_1 و G_2 هامیلتونی هستند. فرض کنید

$$C_1 : v_1, v_2, \ldots, v_t, v_1; \quad t = 2^{k-1}$$

یک دور هامیلتونی در $G_{\text{۱}}$ باشد. u_i را دنبالهٔ k تایی از ۰ و ۱ می‌گیریم که $k-\text{۱}$ مؤلفهٔ اوّل آن برابر v_i مؤلفهٔ $k-\text{۱}$ و مؤلفهٔ kـام آن برابر ۱ باشد، $i=\text{۱},\text{۲},\ldots,t$. در این صورت

$$C_{\text{۲}}: u_{\text{۱}}, u_{\text{۲}}, \ldots, u_t, u_{\text{۱}}$$

یک دور هامیلتونی در $G_{\text{۲}}$ است. حال

$$v_{\text{۱}}, v_{\text{۲}}, \ldots, v_t, u_t, u_{t-\text{۱}}, \ldots, u_{\text{۲}}, u_{\text{۱}}, v_{\text{۱}}$$

یک دور هامیلتونی در kـمکعب است و لذا حکم به استقراء نتیجه می‌شود.

۱۲) چنانچه مکعب‌های $\text{۱}\times\text{۱}\times\text{۱}$ را به‌طور متناوب با رنگهای سفید و سیاه رنگ‌آمیزی کنیم به طوری که رنگ مکعب مرکزی سیاه باشد، در این صورت رنگ مکعب‌های گوشه‌ای سفید است. حال رنگ مکعبی که موش در آن قرار دارد در هر حرکت عوض می‌شود و لذا اگر موش کار خود را از مکعب به رنگ سفید شروع کند، رنگ آخرین مکعب، یعنی مکعب ۲۷ـام نیز باید سفید باشد و لذا موش کار خود را در مرکز مکعب نمی‌تواند تمام کند.

۱۳) به‌ازای هر خانهٔ صفحهٔ شطرنجی یک رأس در نظر می‌گیریم و دو رأس را به یکدیگر متصل می‌کنیم هرگاه بتوان با یک حرکت اسب بین خانه‌های متناظر این دو رأس حرکت کرد. حال مسأله از ما می‌خواهد که آیا این گراف هامیلتونی است یا نه؟

چنانچه رأس متناظر با خانهٔ سطر iام و ستون jام را با v_{ij} نمایش دهیم، $i=\text{۱},\text{۲},\text{۳},\text{۴}; j=\text{۱},\text{۲},\ldots,n$، در این صورت با حذف n

رأس

$$v_{21}, v_{23}, v_{25}, \ldots, v_{32}, v_{34}, v_{36}, \ldots$$

از گراف، گراف حاصل حداقل شامل $n+1$ مؤلفهٔ همبندی است. زیرا در این گراف n رأس

$$v_{11}, v_{13}, v_{15}, \ldots, v_{42}, v_{44}, v_{46}, \ldots$$

تنها هستند. لذا بنا به قضیهٔ ۳۴ این گراف هامیلتونی نیست.

۱۴) رأسهای این گراف را به ترتیب با شماره‌های $1, 2, \ldots, n$ شماره‌گذاری می‌کنیم و گراف مورد نظر را G_n می‌نامیم. با استقراء روی n ثابت می‌کنیم که G_n را می‌توان به صورت اجتماع دو دور هامیلتونی نوشت به طوری که یالهای $\{1, n-1\}$ و $\{1, n\}$ در یک دور و یال $\{2, n\}$ در دور دیگر باشد. برای $n = 5$ دو دور مورد نظر به صورت

$$1, 4, 2, 3, 5, 1; \quad 1, 2, 5, 4, 3, 1$$

هستند و لذا حکم برای $n = 5$ درست است. فرض کنید حکم برای $n = k$ درست باشد و C_1 و C_2 دو دور هامیلتونی از G_k باشند که یالهای G_k را افراز می‌کنند و یالهای $\{1, k-1\}$ و $\{1, k\}$ در C_1 و یال $\{2, k\}$ در C_2 است. چنانچه رأس $k+1$ را در C_1 بین دو رأس ۱ و $k-1$، و در C_2 بین دو رأس ۲ و k قرار دهیم، در این صورت دو دور هامیلتونی از G_{k+1} به‌دست می‌آید که یالهای G_{k+1} را افراز می‌کنند و یالهای $\{1, k\}$ و $\{1, k+1\}$ در یک دور و یال $\{2, k+1\}$ در دور دیگر قرار دارد و لذا حکم به استقراء نتیجه می‌شود.

۱۵) برای هر رأس v، $\deg_G v + \deg_{\overline{G}} v = n - ۱$ است و لذا

$$d_{n+۱-i} + d'_i = n - ۱$$

در نتیجه به‌ازای $i \leq \frac{n}{۲}$

$$d_{n+۱-i} + d_i \geq n - ۱$$

و لذا $d_i \geq i$ و یا $d_{n+۱-i} \geq n - i$. در نتیجه بنا به قضیهٔ ۳۸، G مسیر هامیلتونی دارد.

۱۶) با توجه به مسألهٔ قبل حکم واضح است ، زیرا به‌ازای هر i، $d_i = d'_i$ است.

۱۷) G زیر گرافی از G' است. در نتیجه اگر G هامیلتونی باشد، G' نیز هامیلتونی است. برعکس اگر G' هامیلتونی باشد و

$$C : v_۱, v_۲, \ldots, v_{۲n}, v_۱$$

یک دور هامیلتونی از G' باشد، در این صورت چون A مجموعه‌ای مستقل در G' است و $|A| = n$ و C شامل همهٔ رأسهای A است، لذا رأسهای C به‌طور متناوب در A و B قرار دارند. و لذا تمام یالهای C در G قرار دارند و در نتیجه G هامیلتونی است.

۱۸) فرض کنید $\{v_۱, v_۲, \ldots, v_n\}$ مجموعهٔ رأسهای K_n باشد، به طوری که $e_i = v_{۲i-۱}v_{۲i}$، $i = ۱, ۲, \ldots, m$. گراف K_{n-m} را با مجموعهٔ رأسهای $\{u_۱, u_۲, \ldots, u_m, v_{۲m+۱}, \ldots, v_n\}$ در نظر می‌گیریم. این گراف $\frac{۱}{۲}(n - m - ۱)!$ دور هامیلتونی دارد. زیرا اگر

$$C : x_۱, x_۲, \ldots, x_{n-m}, x_۱$$

یک دور هامیلتونی K_{n-m} باشد که $x_۱ = u_۱$، در این صورت برای $x_۲$، $n-m-۱$ انتخاب، برای $x_۳$، $n-m-۲$ انتخاب، ...، و برای x_{n-m}، یک انتخاب وجود دارد. پس کلاً $(n-m-۱)!$ انتخاب برای C وجود دارد. امّا دور هامیلتونی C با دور هامیلتونی

$$C' : x_۱, x_{n-m}, \ldots, x_۲, x_۱$$

یکسان است و لذا هر دور هامیلتونی در شمارش قبل، دو بار شمرده شده است و لذا K_{n-m}، $\frac{۱}{۲}(n-m-۱)!$ دور هامیلتونی دارد. حال در هر یک از این دورهای هامیلتونی، اگر به جای u_i، قرار دهیم $v_{۲i-۱}, v_{۲i}$، یا $v_{۲i}, v_{۲i-۱}$، $i = ۱, ۲, \ldots, m$، در این صورت یک دور هامیلتونی از K_n به‌دست می‌آید و لذا K_n، $\frac{۱}{۲}(n-m-۱)! \times ۲^m$ دور هامیلتونی شامل یالهای $e_۱, e_۲, \ldots, e_m$ دارد.

۱۹) چنانچه G هامیلتونی نباشد، بنا به قضیهٔ ۳۷، اندیس $i < \frac{n}{۲}$ وجود دارد که $d_i \leq i$ و $d_{n-i} < n-i$ و لذا $d_i + d_{n-i} < n$ که این با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه G هامیلتونی است.

۶.۱۰ حل مسایل فصل هفتم

۱) چنانچه گراف پترسن را P بنامیم، در این صورت

$$g(P)=۵, q(P)=۱۵, p(P)=۱۰$$

$$g(K_{۳,۳})=۴, q(K_{۳,۳})=۹, p(k_{۳,۳})=۶$$

$$g(K_۵)=۳, q(K_۵)=۱۰, p(K_۵)=۵$$

هیچ یک از سه گراف فوق در رابطهٔ $q \leq \frac{(p-۲)g}{g-۲}$ صدق نمی‌کنند و لذا بنا به قضیهٔ ۳۹ این سه گراف مسطح نیستند.

۲) اگر $۶ \geq \delta$ باشد، آنگاه

$$۲q=\sum \deg v \geq ۶p \Longrightarrow q \geq ۳q$$

که با نتیجهٔ ۱ از قضیهٔ ۳۹ در تناقض است. در نتیجه $۵ \leq \delta$ است.

۳) با استقراء روی تعداد رأسهای G حکم را ثابت می‌کنیم. بنا به مسألهٔ قبل، $۵ \leq \delta(G)$ است. اگر v رأسی از G با $۵ \leq \deg v$ باشد، در این صورت طبق فرض استقراء رأسهای $G-v$ را می‌توان با ۶ رنگ طوری رنگ‌آمیزی کرد که رنگهای هر دو رأس مجاور غیر

یکسان باشند. حال چون $\deg v \leq ۵$ لذا از ٦ رنگی که برای $G - v$ به‌کار رفته است، حداقل یک رنگ وجود دارد که رنگ هیچ یک از همسایه‌های v نیست. چنانچه v را با این رنگ رنگ‌آمیزی کنیم، رنگ‌آمیزی مطلوب برای G به‌دست می‌آید.

۴) چون G مسطح است، لذا $q(G) \leq ۳p - ٦$. از طرفی $q(\overline{G}) + q(G) = \binom{p}{۲}$ حال چون $p \geq ۱۱$، لذا

$$q(\overline{G}) = \binom{p}{۲} - q(G) \geq \frac{p(p-۱)}{۲} - ۳p + ٦ > ۳p - ٦$$

و لذا $\overline{G}$ مسطح نیست.

۵) بنا به نتیجهٔ ۱ از قضیهٔ ۳۹، حداکثر $۸ = ۷ - ٦ - ۷ \times ۳$ زوج از نقاط دایره را می‌توان با یک منحنی در صفحه به یکدیگر وصل کرد که هیچ دو منحنی یکدیگر را قطع نکنند. و در ضمن محیط دایره را نیز قطع نکنند به‌راحتی خود می‌توانید ببینید که با ۸ منحنی این کار امکان‌پذیر است و لذا جواب مسألهٔ ۸ است.

٦) حداکثر تعداد ناحیه هنگامی تولید می‌شود که هیچ سه قطری در یک نقطه متقارب نباشند. حال اگر رأسهای n ضلعی و محل برخورد قطرها را رأسهای یک گراف و پاره‌خط‌های بین این رأسها را یال بگیریم، در این صورت گراف حاصل مسطح خواهد بود. علاوه بر n رأس n ضلعی، مابقی رأسهای گراف از برخورد دو قطر به‌دست می‌آید و لذا تعداد این رأسها برابر $\binom{n}{۴}$ است. در نتیجه تعداد رأسهای گراف برابر $n + \binom{n}{۴}$ است. علاوه بر n رأس n ضلعی که درجهٔ این رأسها برابر $n - ۱$ است، درجهٔ مابقی رأسها برابر ۴ است و لذا تعداد

یالهای گراف برابر است با

$$q = \frac{۱}{۲}\sum \deg v = \frac{۱}{۲}n(n-۱) + \frac{۱}{۲}\binom{n}{۴} \times ۴ = \binom{n}{۲} + ۲\binom{n}{۴}$$

در نتیجه بنا به فرمول اولر تعداد نواحی تولید شده توسط این گراف برابر است با

$$f = q-p+۲ = \binom{n}{۲}+۲\binom{n}{۴}-\binom{n}{۴}-n+۲ = \binom{n-۱}{۲}+\binom{n}{۴}+۱$$

و چون تعداد نواحی درون n ضلعی مورد نظر است جواب مسأله برابر $\binom{n}{۴} + \binom{n-۱}{۲}$ است.

۷) دو نقطه را با پاره‌خط به یکدیگر وصل می‌کنیم هرگاه فاصلهٔ آنها دقیقاً برابر ۱ باشد. G را گرافی می‌گیریم که نمودار آن شکل به‌وجود آمده در صفحه توسط نقاط $A_۱, A_۲, \ldots, A_n$ باشد. برای اثبات حکم کافی است ثابت کنیم G مسطح است. اگر دو پاره‌خط، مثلاً $A_۱A_۲$ و $A_۳A_۴$ یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند، در این صورت طول یکی از $A_۱D$ و $A_۲D$، مثلاً $A_۱D$، حداکثر $\frac{۱}{۲}$ است. همچنین طول یکی از $A_۳D$ و $A_۴D$، مثلاً $A_۳D$، حداکثر $\frac{۱}{۲}$ است و لذا

$$A_۱A_۳ < A_۱D + A_۳D \leq \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

و این با فرض مسأله در تناقض است.

۷.۱۰ حل مسایل فصل هشتم

۱) در میان مسیرهای جهتدار در D

$$P : x_1, x_2, \ldots, x_k$$

را مسیری جهتدار با بزرگترین طول در نظر می‌گیریم. اگر رأس x_0 موجود باشد که $(x_0, x_1) \in E$، در این صورت $x_0 \notin \{x_2, x_3, \ldots, x_k\}$ زیرا اگر $x_0 = x_i$، آنگاه

$$x_i, x_1, x_2, \ldots, x_i$$

یک دور جهتدار در D است که با فرض مسأله در تناقض است. در نتیجه x_0 در P ظاهر نشده است و لذا

$$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_k$$

مسیری با طول بزرگتر از طول P است که این نیز با تعریف P در تناقض است. در نتیجه رأس x_0 وجود ندارد و لذا $\deg^- x_1 = 0$ و در نتیجه $\delta^- = 0$.

حال با استقراء روی p ثابت می‌کنیم ترتیبی از رأسهای D مانند $v_1, v_2, \ldots, v_p$ وجود دارد که برای $i < j$، $(v_i, v_j) \notin E$. برای $p = 1$ که حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $p - 1$ درست

باشد و D گرافی جهتدار بدون دور جهتدار باشد. در این صورت $\delta^- = \circ$ و لذا رأس v_p از D وجود دارد که $\deg^- v_p = \circ$. چون D دور جهتدار ندارد لذا $D - v_p$ نیز دور جهتدار ندارد و لذا طبق فرض استقراء ترتیبی از رأسهای $D - v_p$ مانند $v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ وجود دارد که برای $1 \leq i < j \leq p - 1$، $(v_i, v_j) \notin E(D - v_p)$. حال چون $\deg^- v_p = \circ$، دنبالهٔ $v_1, v_2, \ldots, v_p$ خواص مورد نظر را دارد و لذا حکم مسأله به استقراء نتیجه می‌شود.

۲) در میان مسیرهای جهتدار در D

$$P : x_\circ, x_1, \ldots, x_k$$

را مسیری جهتدار با بزرگترین طول در نظر می‌گیریم. دو حالت زیر را داریم.

حالت اول. $\delta^- \geq \delta^+$. اگر $k < \delta^+$ باشد، در این صورت چون $\deg^+ x_k > k$، لذا رأس x_{k+1} وجود دارد که $x_{k+1} \notin \{x_\circ, x_1, \ldots, x_{k-1}\}$ و $(x_k, x_{k+1}) \in E$. در این صورت

$$x_\circ, x_1, \ldots, x_{k+1}$$

مسیری جهتدار با طول بزرگتر از طول P است که با تعریف P در تناقض است. لذا $k \geq \delta^+$.

حالت دوم. $\delta^+ \geq \delta^-$. در این حالت نیز مشابه حالت اول فرض $k < \delta^-$ به تناقض می‌رسد و لذا $k \geq \delta^-$ و حکم ثابت می‌شود.

۳) همانند مسألهٔ قبل

$$P : x_\circ, x_1, \ldots, x_k$$

را مسیری جهتدار با بزرگترین طول در نظر می‌گیریم. در این صورت بنا به مسألهٔ قبل، $k \geq \max\{\delta^+, \delta^-\}$. همچنین بنا به تعریف P، اگر رأس y موجود باشد که $(x_k, y) \in E$ یا $(y, x_\circ) \in E$، آنگاه $y \in \{x_\circ, x_۱, \ldots, x_k\}$. اکنون دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

حالت اوّل. $\delta^- \geq \delta^+$ و لذا $\ell = \delta^- > \circ$.

در این حالت اندیس $i \geq \ell$ وجود دارد که $(x_i, x_\circ) \in E$ و لذا

$$x_i, x_\circ, x_۱, \ldots, x_i$$

دوری جهتدار به طول حداقل $\ell + ۱$ در D است.

حالت دوّم. $\delta^+ \geq \delta^-$ و لذا $\ell = \delta^+ > \circ$.

در این حالت نیز مانند حالت اوّل نتیجه می‌گیریم دوری جهتدار به طول حداقل $\ell + ۱$ در D وجود دارد.

۴) فرض کنید G' گرافی باشد که از اضافه کردن رأس x به G و وصل کردن آن به تمام رأسهای فرد G به‌دست می‌آید. در این صورت G' یک گراف اولری است و لذا تور اولری مانند

$$x_\circ, x_۱, x_۲, \ldots, x_n, x_{n+۱} = x_\circ$$

دارد. حال جهت یال $x_i x_{i+۱}$ را به صورت $(x_i, x_{i+۱})$ در نظر می‌گیریم و گراف جهتدار حاصل را D' می‌نامیم. در این صورت برای هر رأس v از D'، $\deg^+ v = \deg^- v$. قرار می‌دهیم $D = D' - x$، در این صورت D یک گراف جهتدار با گراف زمینهٔ G است که برای هر رأس v از آن، $|\deg^+ v - \deg^- v| \leq ۱$ است.

۵) با استقراء روی p، تعداد رأسهای D، حکم را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $p = ۱$ حکم واضح است. اگر حکم برای اعداد $۱, ۲, \ldots, p - ۱$ درست باشد و D گرافی جهتدار شامل p رأس، و x رأسی از D باشد، در این صورت قرار می‌دهیم

$$N^+(x) = \{y \in D | (x, y) \in E\}$$

و $D' = D - (\{x\} \cup N^+(x))$. بنا به فرض استقراء مجموعهٔ مستقل S' از D' وجود دارد که برای هر رأس $v \in V(D') - S'$، رأس $u \in S'$ یافت می‌شود که از u به v مسیری جهتدار به طول حداکثر ۲ وجود دارد. حال اگر رأس $z \in S'$ موجود باشد که $(z, x) \in E$ در این صورت $S = S'$ مجموعه‌ای مستقل در D است که در شرایط مسأله صدق می‌کند. در غیر این صورت $S = S' \cup \{v\}$ مجموعه‌ای مستقل در D است که در شرایط مسأله صدق می‌کند و لذا حکم مسأله به استقراء ثابت می‌شود.

۶) بنا به نتیجهٔ قضیهٔ ۱۳، D زیر گرافی دو بخشی و فراگیر مانند $D' = (A, B)$ دارد که $q(D') \geq \frac{۱}{۲} q(D)$. و لذا $q(D') \geq ۲n$. در نتیجه در D' حداقل n یال وجود دارد که جهت آنها از یک بخش به بخش دیگر است، مثلاً از A به B. D'' را زیر گراف فراگیر D شامل این n یال در نظر می‌گیریم. بنا به نتیجه قضیهٔ ۱۸، D'' دور دارد. اما جهت یالهای هر دور در D'' یک در میان مستقیم و معکوس است و لذا حکم بدین ترتیب ثابت می‌شود.

۸.۱۰ حل مسایل فصل نهم

۱) فرض کنید $\alpha = \alpha(G)$، در این صورت طبق فرض، برای هر یال uv، هر $\alpha + ۱$ رأس مستقل در $G - uv$ شامل u و v است. زیرا در غیر این صورت این $\alpha + ۱$ رأس در G نیز مستقل هستند. حال اگر w یک رأس برشی G باشد، در این صورت $G - w$ حداقل دو مؤلفهٔ همبندی دارد. فرض کنید A و B دو مؤلفهٔ همبندی $G - w$ و $x \in A$ و $y \in B$ دو رأس مجاور w در G باشند. بنا به فرض $G - wx$ و $G - wy$، $\alpha + ۱$ رأس مستقل دارند.

فرض کنید $S_۱ = \{w, x, x_۲, \ldots, x_\alpha\}$ مجموعه‌ای مستقل در $G - wx$ و $S_۲ = \{w, y, y_۲, \ldots, y_\alpha\}$ مجموعه‌ای مستقل در $G - wy$ باشد. همچنین $A_i = S_i \cap A$، $i = ۱, ۲$. اگر $|A_۱| > |A_۲|$ باشد، در این صورت $A_۱ \cup (S_۲ - (A_۲ \cup \{w\}))$ مجموعه‌ای مستقل با بیش از α رأس در G است. اگر $|A_۱| < |A_۲|$ باشد، در این صورت $A_۲ \cup (S_۱ - (A_۱ \cup \{w\}))$ مجموعه‌ای مستقل با بیش از α رأس در G است. اگر $|A_۱| = |A_۲|$ باشد، در این صورت $A_۲ \cup (S_۱ - A_۱)$ مجموعه‌ای مستقل با بیش از α رأس در G است. در نتیجه همواره مجموعه‌ای مستقل با بیش از α رأس در G وجود دارد که با $\alpha = \alpha(G)$ در تناقض است. در نتیجه G رأس برشی ندارد.

۲) با توجه به قضیهٔ ۴۶ و مسألهٔ قبل، حکم واضح است.

۳) چنانچه v رأسی متعلق به بخش شامل n_i رأس باشد، در این صورت $\deg v = n - n_i$ و لذا

$$۲q = \sum_{i=۱}^{r} n_i(n - n_i) = n\sum_{i=۱}^{r} n_i - \sum_{i=۱}^{r} n_i^۲ = n^۲ - \sum_{i=۱}^{r} n_i^۲.$$

۴) فرض کنید در میان زیر گرافهای rـبخشی فراگیر از G، H شامل بیشترین تعداد یال باشد. در این صورت هر دو رأس مجاور در G، چنانچه در دو بخش مختلف H باشند، در H نیز مجاورند. فرض کنید $A_۱, A_۲, \ldots, A_r$ بخشهای H باشند. اگر رأس v موجود باشد که $\deg_H v < (۱ - \frac{۱}{r}) \deg_G v$ و مثلاً $v \in A_۱$ باشد، در این صورت

$$|N(v) \cap A_۱| = \deg_G v - \deg_H v > \frac{۱}{r} \deg_G v$$

همچنین اندیس $i > ۱$ موجود است که $|N(v) \cap A_i| < \frac{۱}{r} \deg_G v$، زیرا در غیر این صورت

$$\deg_H v = \sum_{i=۲}^{r} |N(v) \cap A_i| \geq (r-۱)\cdot\frac{۱}{r} \deg_G v = (۱-\frac{۱}{r}) \deg_G v$$

که با فرض $\deg_H v < (۱ - \frac{۱}{r}) \deg_G v$ در تناقض است. حال فرض کنید

$$A'_۱ = A_۱ - \{v\}, A'_i = A_i \cup \{v\}, A'_j = A_j, j \neq ۱, i$$

و H' زیر گرافی فراگیر و rـبخشی از G با بخشهای $A'_۱, A'_۲, \ldots, A'_r$ باشد به طوری که هر دو رأس مجاور در G که در دو بخش مختلف H' قرار دارند، در H' نیز مجاور هستند. در این صورت

$$q(H') = q(H) - |N(v) \cap A_i| + |N(v) \cap A_۱| > q(H)$$

و این با تعریف H در تناقض است. در نتیجه برای هر رأس v، $\deg_H v \geq (1 - \frac{1}{r}) \deg_G v$.

۵) فرض کنید $A_1, A_2, \ldots, A_r$ بخشهای گراف $T_{n,r}$ باشند و $|A_1| = a$. همچنین E مجموعهٔ یالهای گراف کامل $n - a$ رأسی با مجموعهٔ رأسهای $\cup_{i=2}^{r} A_i$، E_j مجموعهٔ یالهای گراف کامل با مجموعهٔ رأسهای A_j، و L_j مجموعهٔ یالهای گراف دو بخشی کامل با بخشهای A_1 و A_j باشد، $j = 2, 3, \ldots, r$. در این صورت

$$E(T_{n,r}) = E \cup (\bigcup_{j=2}^{r} L_j) - (\bigcup_{j=2}^{r} E_j)$$

و لذا

$$q(T_{n,r}) = |E| + \sum_{j=2}^{r} (|L_j| - |E_j|)$$

امّا هر بخش گراف $T_{n,r}$ شامل a رأس و یا $a + 1$ رأس است. لذا اگر $|A_j| = a$، آنگاه

$$|L_j| - |E_j| = a^2 - \binom{a}{2} = \binom{a+1}{2}$$

و اگر $|A_j| = a + 1$، آنگاه

$$|L_j| - |E_j| = a(a+1) - \binom{a+1}{2} = \binom{a+1}{2}$$

و در نتیجه

$$q(T_{n,r}) = |E| + \sum_{j=2}^{r} (|L_j| - |E_j|) = \binom{n-a}{2} + (r-1)\binom{a+1}{2}.$$

۶) با استقراء روی r حکم را ثابت می‌کنیم. برای $r = ۱$ حکم واضح است. فرض کنید حکم برای $r - ۱$ درست باشد و G گرافی n رأسی بدون خوشهٔ $r + ۱$_تایی و v رأسی از درجهٔ Δ باشد. در این صورت $G' = G[N(v)]$ خوشهٔ r_تایی ندارد و لذا طبق فرض استقراء

$$q(G') \leq (۱ - \frac{۱}{r - ۱})\frac{\Delta^۲}{۲}$$

در نتیجه

$$q(G) \leq q(G') + \Delta(n - \Delta) \leq (۱ - \frac{۱}{r - ۱})\frac{\Delta^۲}{۲} + \Delta(n - \Delta)$$

برای اثبات حکم، کافی است ثابت کنیم

$$(۱ - \frac{۱}{r - ۱})\frac{\Delta^۲}{۲} + \Delta(n - \Delta) \leq (۱ - \frac{۱}{r})\frac{n^۲}{۲}$$

ولی این نابرابری با نابرابری $((r - ۱)n - r\Delta)^۲ \geq ۰$ معادل است و لذا حکم برقرار است.

۷) فرض کنید G گرافی با مجموعهٔ رأسهای S باشد و دو رأس مجاور یکدیگر هستند هرگاه فاصلهٔ آنها بیشتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ باشد. برای اثبات $q(G) \leq \lfloor \frac{n^۲}{۳} \rfloor$، بنا به مسأله قبل، کافی است ثابت کنیم G خوشهٔ ۴ تایی ندارد. برای هر ۴ نقطه در صفحه، ۳ نقطه A، B، و C می‌توان یافت که $\widehat{ABC} \geq ۹۰^\circ$. زیرا برای هر ۴ نقطه در صفحه یکی از دو حالت زیر را داریم.

حالت اوّل. ۴ نقطه تشکیل یک ۴_ضلعی محدب می‌دهند.

در این حالت مجموع زوایای داخلی ۴_ضلعی برابر ۳۶۰° است و لذا یکی از زوایای آن حداقل ۹۰° است.

حالت دوّم. یک نقطه، درون مثلث تشکیل شده توسط سه نقطهٔ دیگر قرار دارد.

در این حالت اگر D درون مثلث ABC باشد، در این صورت یکی از زوایای $\widehat{ADB}$، $\widehat{ADC}$، و $\widehat{BDC}$ حداقل ۱۲۰° است.

حال اگر ۴ رأس از G تشکیل یک خوشهٔ ۴ـتایی دهند، در این صورت به‌ازای ۳ نقطه از آنها مانند A، B، و C، $\widehat{ABC} \geq ۹۰^\circ$ است. و لذا

$$AC^۲ = AB^۲ + BC^۲ - ۲AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} > (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ = ۱$$

و در نتیجه $AC > ۱$ که با فرض مسأله در تناقض است.

کتاب‌نامه

[1] Douglas B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, 1996.

[2] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, Graph Theory With Aplications, American Elsevier, New York, 1976.

[۳] نشریهٔ راه المپیاد، پیش شماره و شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، و ۷.


SNW
به شبکه مدرسه خوش آمدهاید
راهنمای شبکه
ارتباط با شبکه
درباره شبکه
پست الکترونیکی
ارسال اطلاعات جهت عضویت در شبکه
اشتراک جهت مجلات رادالمپیاد و کامپیوتر جوان
مشترکین بزودی می‌توانند با ۳۲ خط تلفن به شبکه متصل شوند.
مانیتور
School Net Work
مانیتور